107 REPRÉSENTATIONS ET CARACTÈRES D'UN GROUPE FINI SUR UN $\mathbb{C}$-ESPACE VECTORIEL. EXEMPLES.

On considère des groupes finis et des espaces vectoriels complexes de dimension finie.

I. Définitions et constructions de représentations

[Rom17, Ch6, p179] [Ser98, Ch1, p15]

Définition représentation, degré de la représentation
Remarque : on peut reformuler cela en terme d'action de groupes
Exemple : représentation triviale, représentation de degré 1 : morphisme de G dans $\mathbb{U}$
Injection naturelle si $G \subset \mathcal{GL}_n(\mathbb{C})$ Représentations de degré 1 et 2 sur $\mathfrak{S}_n$, sur $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$
Représentation naturelle de D_{2n} dans $\mathcal{GL}_2(\mathbb{C})$
Application : pour tout g, $\rho(g)$ est diagonalisable
Représentation par permutation, représentation régulière
Représentation en somme directe
Morphisme de représentation, représentation homomorphique de degré $\dim(V)\dim(W)$

II. Sous-représentations, irréductibilité

[Rom17, §6.2, p182] [Ser98, §1.3/1.4, p17]

Sous-représentation, représentation quotient
Si on a un morphisme de représentation, le noyau est l'image sont des sous-représentations
Représentation irréductible. Exemple des représentations de degré 1. Contre-exemple : représentation régulière si $|G| > 1$
Si G est abélien, les représentations irréductibles sont les représentations de degré 1
Lemme de Schur, lemme de Maschke

III. Théorie des caractères

[Rom17, §6.3/6.4, p186] [Ser98, Ch2, p23]

III. A. Caractères et fonctions centrales

Caractère (irréductible) associé à une représentation (irréductible)
Exemple : en dimension 1 c'est un morphisme de groupes
Exemple : calcul du caractère de la représentation régulière
Les caractères sont constants sur les classes de conjugaison, $\chi(g)$ est somme de racines de l'unité, $\chi_{V\oplus W} = \chi_V + \chi_W$
Deux représentations isomorphes ont même caractère
Introduction de l'espace des fonctions centrales, du produit scalaire

III. B. Orthogonalité des caractères

Produit scalaire entre caractères irréductibles : 1 s'ils sont isomorphes, 0 sinon
Se donner une représentation irréductible revient à isomorphisme près à se donner un caractère irréductible
On a un nombre fini de caractère irréductibles, inférieur au nombre de classe de conjugaisons
Nombre d'apparitions d'un caractère irréductible dans une représentation
Deux représentations de même caractère sont isomorphes
Se donner une représentation revient à isomorphisme près à se donner un caractère ! L'ensembles des traces suffit à caractériser ρ : on réduit l'étude des représentations aux caractères !
$|G| = \sum_i n_i^2$ (via la représentation régulière), les caractères forment une base orthonormée des fonctions centrales. Il y a donc autant de caractères irréductibles que de classes de conjugaison
Définition d'une table de caractères, propriétés d'orthogonalité des lignes (pondérées par le cardinal de la classe !, signifie l'orthogonalité des caractères), des colonnes

IV. Exemples

IV. A. Groupes cycliques et abéliens

[Col11, §I.2.4, p250–252] [Rom17, §6.5, p197]

Table des caractères d'un groupe cyclique

Soit G un groupe abélien fini.

Définition 1. L'exposant de G est le plus petit $d \in \mathbb{N}^*$ tel que $g^d = 1$ pour tout $g \in G$.

Théorème 2. [Structure des groupes abéliens finis] *Il existe un unique entier ℓ et une unique suite $d_1 \geq d_2 \geq \cdots \geq d_\ell$ d'entiers supérieurs à 2 tels que d_1 est l'exposant de G, $d_{i+1} \mid d_i$ pour tout $i \leq \ell - 1$ et $G \simeq \prod_{i=1}^{\ell} \mathbb{Z}/d_i\mathbb{Z}$.*

IV. B. Groupes de permutations

[Pey04, §VIII.1.4/VIII.2.1, p228–232]

Il y a autant de classes de conjugaison que de représentations irréductibles : le nombre de partitions de n.
Représentations de degré 1 : signature et triviale
Exemple de $\mathfrak{S}_3$: caractère associé à l'action sur un triangle. Table des caractères.

Soit G un groupe fini. Soient $\chi_1, \ldots, \chi_r$ ses caractères irréductibles.

Lemme 3. *Soit χ associé à (ρ, V) représentation de G. Alors $\ker(\rho) = \ker(\chi) = \{g \in G \,|\, \chi(g) = \chi(1)\}$.*

Proposition 4. *Les sous-groupes distingués de G sont les $(\cap_{i\in I} \ker \chi_i)_{I \subset [\![1,r]\!]}$.*

Application 5. Table des caractères de $\mathfrak{S}_4$.

ANNEXE

Tables de caractères de quelques groupes.

SPEECH

Les représentations font un lien important entre groupes et géométrie.
Dans un premier temps on définit les représentations et comment construire/définir des représentations à partir d'autres : par exemple la représentation par permutation, ou la construction en augmentant le degré de la représentation ...
Est-il possible de faire l'inverse, de réduire une représentation ? C'est l'objet de la seconde partie où l'on introduit la notion de représentation irréductible, sorte de brique élémentaire des représentations.
Ensuite, on s'intéresse à la théorie des caractères, qui sont des fonctions centrales, ensemble qui peut être muni d'un produit scalaire pour lequel les caractères forment une base orthonormée, dont découlent de nombreux corollaires de décomposition … dont la caractérisation d'une représentation par son caractère !
Dans une dernière partie on s'intéresse aux exemples des groupes cycliques, abéliens, et au groupe des permutations.

COMMENTAIRES

Il faut maîtriser les interprétations géométriques des caractères (par exemple pour $\mathfrak{A}_4$).

QUESTIONS

Q Comment obtient-on la représentation régulière ? Pourquoi est-elle utile ?

R C'est une représentation naturellement induite par l'action par translation à gauche de G sur lui-même (ou idée des permutations).
Elle a l'avantage d'être fidèle, son caractère associé est très simple puisque $\chi(g) = |G|\, \mathbb{1}_{g=e}$ (attention ce n'est pas le cas de la représentation de permutation où $\mathfrak{S}_n$ agit sur $[\![1,n]\!]$ et non sur lui-même !). De plus, chaque représentation irréductible est une sous-représentation de la représentation régulière, ce qui lui confère un rôle important notamment pour montrer que les caractères forment une base des fonctions centrales, puis après obtenir des relations comme $|G| = \sum n_i^2$ et l'orthogonalité sur les colonnes/lignes.

Q À quoi sert de lemme de SCHUR ?

R Le lemme de SCHUR intervient notamment dans l'étude des calculs de produits scalaires, donc pour montrer que les caractères sont orthonormés, et l'orthogonalité des colonnes/-lignes.

Q Retrouver les caractères de $\mathfrak{S}_3$ et donner leur interprétations.

Q Soit G un groupe fini possédant 7 classes de conjugaison et pour lequel on connaît deux caractères :

	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	C_6	C_7
θ	1	1	1	ω	ω^2	ω	ω^2
χ	2	-2	0	-1	-1	1	1

où ω est une racine 3-ième de l'unité distincte de 1. Peut-on déterminer la table des caractères de G ? L'ordre de G ? Le cardinal de chaque classe de conjugaison ? Les groupes distingués ?

R On complète déjà la table par le caractère trivial. Ensuite, on remarque que le produit de deux caractères irréductibles est un caractère irréductible lorsque l'un d'entre eux est de degré 1 (en calculant le produit scalaire, on peut aussi donner la représentation associée), ce qui permet de compléter la table par $\theta^2, \theta\chi$ et $\theta^2\chi$! (on pouvait aussi passer au caractère conjugué, caractère de la représentation duale associée ...)
Par ailleurs on sait qu'il y a 7 caractères irréductibles, il n'en manque qu'un :

	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	C_6	C_7
χ_{triv}	1	1	1	1	1	1	1
θ	1	1	1	ω	ω^2	ω	ω^2
χ	2	-2	0	-1	-1	1	1
θ^2	1	1	1	ω^2	ω	ω^2	ω
$\theta\chi$	2	-2	0	$-\omega$	$-\omega^2$	ω	ω^2
$\theta^2\chi$	2	-2	0	$-\omega^2$	$-\omega$	ω^2	ω
η	a	b	c				

Pour obtenir le dernier caractère, on veut utiliser l'orthogonalité des colonnes. Mais on ne connait aucune valeur. On sait juste que $a \in \mathbb{N}^*$! Cela permet alors d'assurer que les quatre dernières valeurs du caractère sont nulles ! Puis l'orthogonalité des trois premières colonnes donne $ab = 9, ac = -3, bc = -3$, d'où l'on déduit $a = b = 3$ puis $c = -1$. D'où finalement le dernier caractère :

	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	C_6	C_7
η	3	3	-1	0	0	0	0

En calculant la somme des carrés de la première colonne, on obtient que G est d'ordre 24.
Remarquons par ailleurs que pour toute classe C on a

$$\forall g \in G, \mathbb{1}_C(g) = \sum_\chi \langle \mathbb{1}_C \mid \chi\rangle \chi(g) = \sum_\chi \frac{1}{|G|} \sum_{h\in C} \overline{\chi(h)}\chi(g) = \sum_\chi \frac{|C|\,|\chi(g)|^2}{|G|}$$

Autrement dit $[G : C] = \sum_\chi |\chi(C)|^2$. Ce qui permet d'obtenir les ordres des éléments de chaque classe :

	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	C_6	C_7
cardinal	1	1	6	4	4	4	4

On déduit de la table le seul sous-groupe distingué strict : $G_8 = C_1 \cup C_2 \cup C_3$ (unique 8-Sylow).
On a $[G : G_8] = 3$ donc $G/G_8 \simeq \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ et si $\alpha \notin G_8$, on a que α est d'ordre une puissance de 3, disons $3k$. Alors $\beta = \alpha^k$ est d'ordre 3.
On a $G_8 \cap \langle\beta\rangle = \{e\}$ puisque les éléments de G_8 sont d'ordre pairs et ceux de β d'ordre 3 (sauf e), et comme $|G_8|\,|\beta| = 24$ et G_8 est distingué, on en déduit que $G = G_8 \rtimes \langle\beta\rangle$.
Reste à étudier G_8. On sait que G_8 possède au moins 3 classes de conjugaison, donc n'est pas abélien. Il ne peut donc s'agir que de D_8 ou de $\mathbb{H}_8$.
Finalement $G = G_8 \rtimes \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$.

Q Une table de caractères permet-elle d'identifier le groupe en général ?

R Non ! Le groupe diédral D_8 et le groupe des quaternions $\mathbb{H}_8$ ont la même table de caractères, mais ne sont pas isomorphes !

BIBLIOGRAPHIE

[Col11] P. Colmez : *Éléments d'analyse et d'algèbre*. Les éditions de l'École Polytechnique, 2 ème édition, 2011.

[Pey04] G. Peyré : *L'algèbre discrète de la transformée de* Fourier. Ellipses, 2004.

[Rom17] J.-E. Rombaldi : *Mathématiques pour l'agrégation : Algèbre et géométrie*. De Boeck, 2017.

[Ser98] J.-P. Serre : *Représentations linéaires des groupes finis*. Hermann, 1998.