215

NOM : PRENOM :

Sujet choisi : Applications différentiables sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Exemples et applications.

Autre sujet :

On note U un ouvert de $\mathbb{R}^n$.

I Différentielle et dérivées partielles

1 Différentiabilité

[GOU] p303 **DEF/PROP1** $f : U \to \mathbb{R}^m$ est dite différentiable en $a \in U$ s'il existe $\varphi \in \mathcal{L}_c(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ tel que $f(a+h) \underset{h=0}{=} f(a) + \varphi(h) + o(\|h\|)$.

Dans ce cas, φ est unique et est appelée différentielle de f en a, notée df_a.
Si f est différentiable en tout point de U, f est dite différentiable sur U et $df : U \to \mathcal{L}_c(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ est appelée application différentielle de f.
Si df est continue alors f est dite de classe $\mathcal{C}^1$.

p304 **PROP2** Une application différentiable en un point est continue en ce point.

p304 **PROP3** Soient $f, g : U \to \mathbb{R}^m$ différentiables en $a \in U$. Alors $f+g$ est différentiable en a et $d(f+g)_a = df_a + dg_a$.

p304 **PROP4** Soient $f : U \to \mathbb{R}^m$ et $g : V \to \mathbb{R}^p$ avec $f(U) \subset V$ ouvert.
On suppose f différentiable en a et g différentiable en $f(a)$. Alors $g \circ f$ est différentiable en a et $d(g \circ f)_a = dg_{f(a)} \circ df_a$.

[ROU] p76 DEV1 **EX5** Le déterminant est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ \forall H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ d(\det)_M[H] = \mathrm{Tr}(\mathrm{Com}(M)H)$

PROP6 Soit $f = (f_1 \cdots f_m) : U \to \mathbb{R}^m$ différentiable en a. Alors $df_a = (df_{1a} \cdots df_{ma})$.

[GOU] p304 **DEF/PROP7** Soit $f : U \to \mathbb{R}$ différentiable en $a \in U$. Alors il existe un unique $v \in \mathbb{R}^n$ tel que $\forall h \in \mathbb{R}^n,\ df_a(h) = v \cdot h$.
On appelle v le gradient de f en a, noté $\mathrm{grad}_a f$.

2 Dérivées partielles

[GOU] p304 **DEF8** Soit $f : U \to \mathbb{R}^m$. Soit $a \in U$, $v \in \mathbb{R}^n$.
On dit que f est dérivable en a selon v si $\varphi : t \mapsto f(a+tv)$ est dérivable en $t=0$.
On note $f'_v(a) = \varphi'(0) = \lim_{\substack{t \to 0 \\ t \neq 0}} \frac{f(a+tv) - f(a)}{t}$.

p305 **PROP9** Si f est différentiable en a alors elle admet des dérivées en a selon tout vecteur et $\forall v \in \mathbb{R}^n,\ f'_v(a) = df_a(v)$

p309 **EX10** $f : (x,y) \mapsto \frac{y^2}{x}$ admet des dérivées en $(0,0)$ selon tout vecteur mais n'est pas continue en $(0,0)$.

p305 **DEF11** Soit $f : U \to \mathbb{R}^m$. Soit $a \in U$.
Si f est dérivable en a selon e_i vecteur de la base canonique de $\mathbb{R}^n$, on dit que f admet une dérivée partielle en a d'indice i.
On note $f'_{e_i}(a) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$.

p305 **PROP12** Soit $f : U \to \mathbb{R}^m$ différentiable en $a \in U$.
Alors $df_a = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)\, dx_i$
où $(dx_i)_i$ est la base duale de $\mathbb{R}^n$.

p305 **TH13** Soit $f : U \to \mathbb{R}^m$ et $a \in U$.
Si toutes les dérivées partielles de f existent sur U et sont continues en a alors f est différentiable en a et
$$df_a = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}\, dx_i .$$

p307 **DEF14** [MATRICE JACOBIENNE]
Soit $f = (f_1 \cdots f_m) : U \to \mathbb{R}^m$ différentiable en a.
Alors $df_a = \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_j}\, dx_j \right)_{i=1,m}$ et on

215

NOM : PRENOM :

Sujet choisi :

Autre sujet :

note $J_a f = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)_{\substack{1\le i\le m\\ 1\le j\le n}} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$.

Si $m=n$, on appelle $\det(J_a f)$ le jacobien de f en a.

↑307 **Rq15** Avec les notations de PROP4,
$J_a(g\circ f) = J_{f(a)}(g)\, J_a(f)$.

II Utiliser la différentielle pour mieux connaître f

1 Accroissements finis

↑307 **TH16** [inégalité des accroissements finis]
Soit $f: U\to\mathbb{R}^m$. Soient $a,b\in U$ tels que $[a;b]\subset U$.
On suppose f continue sur $[a;b]$ et différentiable en tout point de $]a;b[$.
Si $\forall c\in]a;b[$, $|||df_c||| \le M$ alors
$\|f(b)-f(a)\| \le M\|b-a\|$.

↑308 **COR17** $f: U\to\mathbb{R}^m$ différentiable sur U convexe
$\forall x\in U$, $|||df_x||| \le M$.
Alors $\forall (a,b)\in U^2$, $\|f(a)-f(b)\| \le M\|b-a\|$.

↑308 **COR18** Si U est connexe et $\forall x\in U$, $df_x = 0$ alors f est constante sur U.

2 Inversion locale

↑321 **TH19** [inversion locale]
Soit $f: U\to\mathbb{R}^m$ de classe $\mathcal{C}^1$, soit $a\in U$.
On suppose df_a inversible.
Alors il existe des voisinages V et W de a et $f(a)$ respectivement tels que
- $f|_V : V\to W$ est bijective
- $g = (f|_V)^{-1}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et $\forall x\in V$, $dg_{f(x)} = (df_x)^{-1}$

DEV2

↑323 **COR20** Soit $f: U\to\mathbb{R}^n$ de classe $\mathcal{C}^1$.
On suppose que pour tout $x\in U$, df_x est inversible.
Alors f est une application ouverte.

[ML3] ↑715 **APP21** Soit $f: (\mathbb{R}^n)^* \to (\mathbb{R}^n)^*$ isométrie de classe $\mathcal{C}^1$, $n\ge 2$.
On suppose que pour tout $x\neq 0$, df_x est inversible.
Alors f est surjective.

[GOU] ↑323 **COR22** [INVERSION GLOBALE]
Soit $f: U\to\mathbb{R}^n$ de classe $\mathcal{C}^1$.
- pour tout $x\in U$, df_x est inversible

$\Leftrightarrow$
- $V = f(U)$ est ouvert et $f^{-1}: V\to U$ est de classe $\mathcal{C}^1$.

3 Fonctions implicites

[ML3] ↑716 **TH23** [FONCTIONS IMPLICITES]
Soit V un ouvert de $\mathbb{R}^m$.
Soit $f: \begin{array}{ccc} U\times V & \to & \mathbb{R}^m \\ (x,y) & \mapsto & f(x,y)\end{array}$ de classe $\mathcal{C}^1$.
On suppose qu'il existe $(a,b)\in U\times V$ tel que le jacobien partiel $\det\left(\frac{\partial f_i}{\partial y_j}(a,b)\right)_{1\le i,j\le m}$ est non nul.
Alors il existe
- un voisinage $U'\subset U$ de a
- un voisinage $V'\subset V$ de b
- $\varphi: U'\to V'$ de classe $\mathcal{C}^1$ tels que

$\forall (x,y)\in U'\times V'$, $f(x,y) = f(a,b) \Leftrightarrow y = \varphi(x)$

En particulier, $\forall x\in U'$, $f(x,\varphi(x)) = f(a,b)$ et $\varphi(a) = b$.

↑717 **EX24** à l'aide du TFI, on peut résoudre au voisinage de $(0,-1,1,0)$ le système
$\begin{cases} x^4+y^3+z^4+t^2=0 \\ x^3+y^2+z^2+t=0 \\ x+y+z+t=0 \end{cases}$ en exprimant x,y,z en fonction de t.

215

NOM : PRENOM :

Sujet choisi :

Autre sujet :

Rq 25 Le TIL donne l'existence d'une solution alors que le TFI en donne une infinité (elles forment un graphe). †718

PROP 26 Avec les hypothèses et notations du TFI, †719

$$d_a\varphi = -(d_b f_{2,a})^{-1} \circ d_a f_{1,b}$$

où $f_{2,a} : y \mapsto f(a,y)$ et $f_{1,b} : x \mapsto f(x,b)$.

III Différentielles d'ordre supérieur

DEF 27 On dit que $f : U \to \mathbb{R}^m$ est k fois différentiable en $a \in U$ si f est $(k-1)$ fois différentiable en tout point d'un voisinage $V_a \subset U$ de a et $d^{k-1}f$ est différentiable en a. On note $d_a^k f = d_a(d^{k-1}f)$. †696

Rq 28 On s'autorise l'abus $d_a^k f \in \mathcal{L}_c((\mathbb{R}^m)^k, \mathbb{R}^m)$ †695

Si $h_1 = \dots = h_k$, on note $d_a^k f[h_1 \dots h_k] = d_a^k f[h]^k$

DEF 29 On dit que f est de classe $\mathcal{C}^k$, $k \geq 1$, au point $a \in U$ si f est k fois différentiable en tout point d'un voisinage $V_a \subset U$ de a et $d^k f$ est continue en a. †696

TH 30 [SCHWARZ] †700

Soit $f : U \to \mathbb{R}^m$ deux fois différentiable en a.

Alors $\forall i,j \in [\![1;m]\!]$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a)$.

COR 31 Soit $f : U \to \mathbb{R}^m$ k fois différentiable en $a \in U$, $k \geq 1$. †701

Alors $d_a^k f \in \mathcal{L}_c((\mathbb{R}^m)^k, \mathbb{R}^m)$ est symétrique.

TH 32 [Taylor avec reste intégral] †703

Soit $f : U \to \mathbb{R}^m$ de classe $\mathcal{C}^{k+1}$ sur U, $k \geq 0$. Soient $a \in U$ et $h \in \mathbb{R}^m$ tels que $[a; a+h] \subset U$.

Alors $f(a+h) = f(a) + \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{i!} d_a^i f[h]^i + \int_0^1 \frac{(1-t)^k}{k!} d_{a+th}^{k+1} f\,[h]^{k+1}\,dt$.

APP 33 [Lemme d'Hadamard] [GOU] †311

Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^n$.

- Si $f(0) = 0$ alors on peut écrire $f(x_1 \dots x_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i\, g_i(x_1 \dots x_n)$ avec $\forall i$, $g_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$
- Si de plus $df_0 = 0$ alors $f(x_1 \dots x_n) = \sum_{i<j} x_i x_j\, h_{ij}(x_1 \dots x_n)$ avec $h_{ij} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$.

IV Extremums

DEF 34 Soit $f : U \to \mathbb{R}^m$. [TL3] †730

$x_0 \in U$ est appelé point critique de f si f est différentiable en x_0 et $df_{x_0} = 0$.

TH 35 [condition du 1er ordre] †731

Soit $f : U \to \mathbb{R}^m$ différentiable en $x_0 \in U$. Si x_0 est un point d'extremum local de f alors x_0 est un point critique.

DEF 36 Soit $f : U \to \mathbb{R}^m$ deux fois différentiable en $a \in U$.

La hessienne de f en a est donnée par

$$Hf_a = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a)\right)$$

215

NOM : PRENOM :

Sujet choisi :

Autre sujet :

Rq 37 Le théorème de Schwarz garantit que la hessienne est symétrique.

p731 TH38 [condition du 2nd ordre]
Soit $f : U \to \mathbb{R}^m$ deux fois différentiable en x_0.
Si x_0 est un point de maximum/minimum local de f alors Hf_{x_0} est négative/positive.

p732 EX39 $x \mapsto x^3$ est un contre-exemple de la réciproque

p734 TH40
Soit $f : U \to \mathbb{R}^m$ deux fois différentiable en x_0.
Si x_0 est un point critique et Hf_{x_0} est définie positive alors x_0 est un point de minimum local strict de f.

p734 EX41 étude des extrema de $h(x,y) = x^2 - y^2 + \frac{y^4}{4}$.

Refs

[GOU] GOURDON, Analyse
[ML3] MARCO, Mathématiques L3 Analyse
[ROU] ROUVIERE, Petit de calcul différentiel