

NOM :

PRENOM :

Sujet choisi : Exponentielles de matrices, Applications.

Autre sujet :

 $K = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$  et  $n \in \mathbb{N}^*$ I. Exponentielle et Décomposition de Dunford

[MT]

↑ 57

DEF/PROP1 Soit  $A \in \mathcal{M}_n(K)$ .L'exponentielle de  $A$ , notée  $\exp(A)$  ou  $e^A$ , désigne la somme dans  $\mathcal{M}_n(K)$  qui est complet, de la série normalement convergente  $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}$ .

↑ 57

↑ 58

PROP2  $\forall A \in \mathcal{M}_n(K), \exists P \in K[X], e^A = P(A)$ Rq3 il est faux de dire  $\exists P \in K[X], \forall A \in \mathcal{M}_n(K), e^A = P(A)$ .

[ML3]

↑ 349

↑ 349

PROP4 Soient  $A, B \in \mathcal{M}_n(K)$ .Si  $AB = BA$  alors  $e^{A+B} = e^A e^B$ .COR5  $\forall M \in \mathcal{M}_n(K), e^M \in GL_n(K)$  et  $(e^M)^{-1} = e^{-M}$ .

↑ 350

PROP6 Soit  $M \in \mathcal{M}_n(K)$ .•  $\forall P \in GL_n(K), \exp(PMP^{-1}) = P e^M P^{-1}$ • Si  $M = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$  alors  $e^M = \text{diag}(e^{\lambda_1}, \dots, e^{\lambda_n})$ .• Si  $M$  est triangulaire supérieure de diagonale  $\text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$  alors  $e^M$  est triangulaire supérieure de diagonale  $\text{diag}(e^{\lambda_1}, \dots, e^{\lambda_n})$ .•  $(e^M)^T = e^{M^T}$ •  $\det(e^M) = e^{\text{Tr}(M)}$ • Si  $M$  est nilpotente alors  $e^M$  est unipotente.

[GOU]

↑ 192

DEV1

TH7 [Décomposition de Dunford]Soit  $M \in \mathcal{M}_n(K)$  de polynôme caractéristique scindé.Alors il existe un unique couple  $(D, N) \in K[M]^2$  avec  $D$  diagonalisable et  $N$  nilpotente telles que  $M = D + N$  et  $DN = ND$ .

[ML3]

↑ 350

PROP8 Si  $M = D + N$  est la décomposition de Dunford de  $M$  alors $M = e^D + e^D (e^N - I_n)$  est la décomposition de Dunford de  $e^M$ .COR9 Soit  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  de polynôme caractéristique scindé.Alors  $M$  diagonalisable  $\Leftrightarrow e^M$  diagonalisable.II Injectivité et Surjectivité de l'exponentielle1 Régularité et injectivitéPROP10 L'ensemble des solutions  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  de l'équation  $e^M = I_n$  est l'ensemble des matrices diagonalisables dont le spectre est inclus dans  $2i\pi\mathbb{Z}$ .PROP11  $\exp : \mathcal{M}_n(K) \rightarrow GL_n(K)$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathcal{M}_n(K)$  et  $d_0 \exp = \text{Id}$ .PROP12 Il existe  $U$  et  $V$  voisinages respectivement de  $0$  dans  $\mathcal{M}_n(K)$  et de  $I_n$  dans  $GL_n(K)$  tels que  $\exp : U \rightarrow V$  est un difféomorphisme.APP13 [Petits" sous-groupes de  $GL_n(K)$ ]Il existe  $\varepsilon > 0$  tel que le seul sous-groupe de  $GL_n(K)$  inclus dans  $B(I_n, \varepsilon) = \{M \in \mathcal{M}_n(K) / \|M\| < \varepsilon\}$  est  $\{I_n\}$ .2 Logarithme et surjectivitéDEF14 Si  $A \in B(I_n, 1)$ , on appelle logarithme de  $A$ , noté  $\text{Log } A$ , la somme de la série normalement convergente  $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{(A - I_n)^k}{k}$ .Rq15 Si  $A$  est unipotente (noté  $A \in \mathcal{U}_n(K)$ ) alors la série converge et on peut étendre la définition du logarithme matriciel.

[ROM]

↑ 752

DEV1

[ML3]

↑ 354

↑ 350

↑ 354

↑ 354

[MT]

↑ 60

↑ 60

NOM :

PRENOM :

Sujet choisi :

Autre sujet :

|       |                                                                                                           |                                                                                                       |      |
|-------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------|------|
| [ROM] | <u>LEM16</u> $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \forall t \in \mathbb{R}, \text{Log}(e^{tA}) = tA$ | soit $A(t) = (a_{ij}(t))_{i,j} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$                                         |      |
| p753  | où on note $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices                                            | et                                                                                                    |      |
|       | nilpotentes de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ .                                                              | $B(t) = \begin{pmatrix} b_1(t) \\ \vdots \\ b_n(t) \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n$ sont des fonctions |      |
| p754  | <u>PROP17</u> $\exp: \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \rightarrow \text{Lin}_n(\mathbb{K})$ est bijective        | continues données définies sur un                                                                     |      |
|       | de réciproque $\text{Log}$ .                                                                              | intervalle $I \subset \mathbb{R}$ .                                                                   |      |
| p755  | <u>LEM18</u> Soit $A \in \text{GL}_n(\mathbb{C})$ diagonalisable.                                         | <u>TH24</u> [ADMIS]                                                                                   | p138 |
|       | Il existe $P \in \mathbb{C}_{n-1}[X]$ tel que $e^{P(A)} = A$ .                                            | Pour tout point $(t_0, v_0) \in I \times \mathbb{K}^n$ , il passe une                                 |      |
| p755  | <u>TH19</u> Soit $A \in \text{GL}_n(\mathbb{C})$ .                                                        | unique solution maximale, définie sur                                                                 |      |
|       | Il existe $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que $e^{P(A)} = A$ .                                                  | I tout entier.                                                                                        |      |
| p755  | <u>TH19</u> Soit $A \in \text{GL}_n(\mathbb{C})$ .                                                        | <u>Rq25</u> Lorsque $A(t) = A$ n'est pas diagonalisable,                                              | p139 |
| p755  | Il existe $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que $e^{P(A)} = A$ .                                                  | on a besoin en général de la notion                                                                   |      |
| p755  | En particulier, $\exp: \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \rightarrow \text{GL}_n(\mathbb{C})$ est                 | d'exponentielle de matrices.                                                                          |      |
| p755  | surjective.                                                                                               | <u>TH26</u> La solution sur I de $\frac{dY}{dt} = AY$ telle que                                       | p201 |
| p756  | <u>APP20</u> $\text{GL}_n(\mathbb{C})$ est connexe par arcs                                               | $Y(t_0) = v_0$ est donnée par:                                                                        |      |
| p756  | <u>APP21</u> Soit $p \in \mathbb{N}^*$ . Soit $A \in \text{GL}_n(\mathbb{C})$ .                           | $\forall t \in I, Y(t) = e^{(t-t_0)A} \cdot v_0$ .                                                    |      |
| p756  | Il existe $X \in \mathbb{C}[A]$ inversible telle que                                                      | <u>TH27</u> La solution sur I de $\frac{dY}{dt} = AY + B(t)$                                          | p203 |
| p756  | $X^p = A$ .                                                                                               | telle que $Y(t_0) = v_0$ est donnée par:                                                              |      |
| p756  | <u>PROP22</u>                                                                                             | $\forall t \in I, Y(t) = e^{(t-t_0)A} \cdot v_0 + \int_{t_0}^t e^{(t-u)A} B(u) du$ .                  |      |
| p756  | $\exp(\mathcal{M}_n(\mathbb{R})) = \{M^2, M \in \text{GL}_n(\mathbb{R})\}$                                | <u>Refo</u>                                                                                           |      |
| p756  | De plus $\forall M \in \text{GL}_n(\mathbb{R}), \exists P \in \mathbb{R}[X], e^{P(M)} = M^2$ .            | [MT] MNEIMNE, TESTARD, Introduction à la théorie                                                      |      |
| p756  | III Application aux systèmes différentiels                                                                | des groupes de Lie classiques                                                                         |      |
| p756  | <u>DEF23</u> Un système différentiel linéaire                                                             | [ML3] Mathématiques L3 Algèbre                                                                        |      |
| p756  | du premier ordre dans $\mathbb{K}^n$ est une                                                              | [ROM] ROMBALDI, Mathématiques pour                                                                    |      |
| p756  | équation $\frac{dY}{dt} = A(t)Y + B(t)$ .                                                                 | l'agrégation                                                                                          |      |
| p756  | où $Y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ \vdots \\ y_n(t) \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n$ est la              | [DEM] DEMAILLY, Analyse numérique et                                                                  |      |
| p756  | fonction inconnue                                                                                         | équations différentielles.                                                                            |      |
| p756  |                                                                                                           | [GOU] GOURDON, Algèbre,                                                                               |      |