

NOM :

PRENOM :

Sujet choisi : Formes quadratiques réelles. Uniques. Exemples et applications.

Autre sujet :

E est un $\mathbb{R}$ -ev, $\dim E = n < \infty$, $B = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E

I Formes quadratiques

1 Formes bilinéaires

[GOU] DEF1 Soit $\varphi: E^2 \rightarrow \mathbb{R}$.

On dit que φ est une forme bilinéaire si

- $\forall x \in E, y \mapsto \varphi(x, y)$ est linéaire
- $\forall y \in E, x \mapsto \varphi(x, y)$ est linéaire.

PROP2 Soit $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i \in E$. Soit $y = \sum_{j=1}^n y_j e_j \in E$.

$$\text{Alors } \varphi(x, y) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i y_j \varphi(e_i, e_j) \\ = {}^t X M Y \text{ où } M = (\varphi(e_i, e_j))_{i,j}$$

On dit que M est la matrice de φ dans la base B .

PROP3 Soit B' une autre base de E .

On note M la matrice de φ dans B

M' la matrice de φ dans B'

P la matrice de passage de B à B' .

$$\text{Alors } M' = {}^t P M P.$$

DEF4 Soit $\varphi: E^2 \rightarrow \mathbb{R}$ une forme bilinéaire.

On dit que φ est symétrique si

$$\forall (x, y) \in E^2, \varphi(x, y) = \varphi(y, x).$$

PROPS Soit $\varphi: E^2 \rightarrow \mathbb{R}$ une forme bilinéaire.

φ est symétrique ssi la matrice de φ dans la base B est symétrique.

2 Forme quadratique associée

DEF6 On appelle forme quadratique sur E toute application de la forme $q: E \rightarrow \mathbb{R}$ $x \mapsto \varphi(x, x)$.

PROP7 La forme bilinéaire associée à q est appelée sa forme plaire et vérifie :

$$\forall (x, y) \in E^2, \varphi(x, y) = \frac{1}{2} [q(x+y) - q(x) - q(y)]$$

$$= \frac{1}{2} [q(x+y) - q(x-y)].$$

$$\text{EX8 Si } \varphi(x, y) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i y_j$$

$$\text{alors } q(x) = \sum_{i=1}^n a_{ii} x_i^2 + \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} a_{ij} (x_i + x_j)$$

et réciproquement.

DEF9 Soit q une forme quadratique sur E .

On appelle matrice de q dans la base B la matrice de la forme plaire φ de q dans la base B , et rang de q le rang de cette matrice.

$$\text{EX10 } q: (x, y, z) \mapsto 3x^2 + y^2 + 2xy - 3xz$$

de rang 3.

3 Positivité

DEF11 On dit que q est positive si $\forall x \in E, q(x) \geq 0$.

DEF12 On appelle cône isotrope de q l'ensemble $\mathcal{C}_q = \{x \in E / q(x) = 0\}$.

Un vecteur $x \in E$ est dit isotrope si $x \in \mathcal{C}_q$. q est dite définie si $\mathcal{C}_q = \{0\}$.

TH13 [Inégalité de Schwarz]

Si q est positive alors

$$\forall (x, y) \in E^2, |\varphi(x, y)|^2 \leq q(x) q(y).$$

Si de plus q est définie alors il y a égalité ssi x et y sont liés.

Rq14 Si E est normé, cela implique la continuité de φ .

COR15 [Inégalité de Minkowski]

Si q est positive alors

$$\forall (x, y) \in E^2, \sqrt{q(x+y)} \leq \sqrt{q(x)} + \sqrt{q(y)}.$$

NOM :

PRENOM :

Sujet choisi :

Autre sujet :

II Orthogonalité

1 Définition & premières propriétés

f226 **DEF 16** Soient $x, y \in E$.
On dit que x et y sont orthogonaux selon φ si $\varphi(x, y) = 0$.

Soit $A \subseteq E$.

On appelle orthogonal de A selon φ l'ensemble $A^\perp = \{x \in E / \forall y \in A, \varphi(x, y) = 0\}$.

$A \subseteq E$ & $B \subseteq E$ sont dits orthogonaux selon φ si $\forall x \in A, \forall y \in B, \varphi(x, y) = 0$. On note $A \perp B$.

f226 **PROP 17** • $\forall F \subseteq E, F \subseteq F^{\perp\perp}$
• $\forall A \subseteq B \subseteq E, B^\perp \subseteq A^\perp$.

f227 **DEF 18** On appelle noyau de q le s.v. :
 $\text{Ker } q = \{x \in E / \forall y \in E, \varphi(x, y) = 0\}$.
 q est dite dégénérée si $\text{Ker } q \neq \{0\}$.

f227 **PROP 19** $\text{Ker } q \subseteq \mathcal{L}_q$

f231 Si q est positive, $\text{Ker } q = \mathcal{L}_q$.

f227 **PROP 20** En identifiant $x = X$ & $y = Y$,
on a $\text{Ker } q = \text{Ker } A$ si A est la matrice de q dans la base B .

2 Base φ -orthogonale

f227 **DEF 21** Une base de E est dite orthogonale si tous ses vecteurs sont orthogonaux deux à deux.

f227 **TH 22** Il existe une base φ -orthogonale de E .

f227 **COR 23** Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ symétrique.
Il existe $P \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$ tel que ${}^t P A P$ soit diagonale.

f229 **PROP 24** Soit F un s.v. de E ,
• $\dim F + \dim F^\perp = \dim E + \dim(F \cap \text{Ker } q)$
• $F^{\perp\perp} = F + \text{Ker } q$.

PROPS Soit F un s.v. de E .

On suppose q définie. Alors

- $F \oplus F^\perp = E$
- $F = F^{\perp\perp}$.

3 Classification des formes quadratiques réelles

ALG 26 $q(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n a_{ii} x_i^2 + \sum_{i < j} a_{ij} x_i x_j$

[Gauss] En procédant par récurrence, on va écrire q comme combinaison linéaire de carrés de formes linéaires indépendantes.

1^{er} cas $\exists i \in [1; n], a_{ii} \neq 0$ (mettons $i=1$)

Alors $q(x_1, \dots, x_n) = a_{11} x_1^2 + x_1 B(x_2, \dots, x_n) + C(x_2, \dots, x_n)$
où B est une forme linéaire
& C est une forme quadratique

$$q(x_1, \dots, x_n) = a_{11} \left[x_1 + \frac{B(x_2, \dots, x_n)}{2a_{11}} \right]^2 + C(x_2, \dots, x_n) - \frac{1}{4a_{11}} B(x_2, \dots, x_n)^2$$

2^{ème} cas $\forall i \in [1; n], a_{ii} = 0$

Si $q = 0$ alors c'est terminé.

Sinon il existe $(i, j) \in [1; n]^2, a_{ij} \neq 0$.

$$q(x_1, \dots, x_n) = a_{12} x_1 x_2 + x_1 B(x_2, \dots, x_n) + x_2 C(x_2, \dots, x_n) + D(x_3, \dots, x_n)$$

où B & C sont des formes linéaires
& D est une forme quadratique.

$$q(x_1, \dots, x_n) = \frac{a_{12}}{4} \left[\left(x_1 + x_2 + \frac{B+C}{a_{12}} \right)^2 - \left(x_1 - x_2 + \frac{C-B}{a_{12}} \right)^2 \right] + D - \frac{BC}{a_{12}}$$

TH 27 [Sylvester]

On suppose B orthogonale selon φ .

f229

f228

f230

NOM :

PRENOM :

Sujet choisi :

Autre sujet :

Alors $q(x) = \sum_{i=1}^n x_i^2 q(e_i) = \sum_{i=1}^n \lambda_i (e_i^*(x))^2$
en posant $\lambda_i = q(e_i)$.
On suppose $\lambda_1, \dots, \lambda_n > 0$ et $\lambda_{n+1}, \dots, \lambda_{n+s} < 0$
et $\lambda_{n+s+1} = \dots = \lambda_m = 0$.
Alors $q(x) = \sum_{i=1}^n (\sqrt{\lambda_i} e_i^*(x))^2 - \sum_{i=n+1}^{n+s} (\sqrt{-\lambda_i} e_i^*(x))^2$
Dans la base $(\sqrt{\lambda_1} e_1, \dots, \sqrt{\lambda_n} e_n, \sqrt{-\lambda_{n+1}} e_{n+1}, \dots, \sqrt{-\lambda_{n+s}} e_{n+s}, e_{n+s+1}, \dots, e_m)$,
la matrice de q est $\begin{pmatrix} I_n & & \\ & -I_s & \\ & & 0 \end{pmatrix}$.
Le couple (n, s) , appelé la signature de q ,
ne dépend pas de l'écriture choisie.
De plus, le rang de q est égal à $n+s$.

III Coniques

[AUD] f222 DEF28 $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ est dit polynôme de degré 2
s'il existe $\Omega \in \mathbb{R}^2$, une quadratique non nulle
 q , une forme linéaire L_Ω et $c_\Omega \in \mathbb{R}$
tels que $\forall M \in \mathbb{R}^2, f(M) = q(\vec{OM}) + L_\Omega(\vec{OM}) + c_\Omega$.

f223 DEF29 On appelle conique affine la classe
d'équivalence d'un polynôme de degré 2 f sous
la relation " $f \sim g \iff \exists \lambda \in \mathbb{R}, g = \lambda f$ ".
L'ensemble $f^{-1}(0)$ est l'image de la conique.

f227 DEF30 On dit que Ω est un centre pour
la conique si $L_\Omega = 0$.
Si le centre est unique on dit que la conique
est à centre.

f227 PROP31 Si Ω est un centre de la conique alors
c'est un centre de symétrie.

f227 TH32 Soit f une conique.
 f est à centre ssi la partie quadratique

de f est non dégénérée.

DEF33 Soit $f: M \mapsto q(\vec{OM}) + L(\vec{OM}) + c$ f223
une conique.

f est dite propre si la forme quadratique
 $Q: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $Q: (u, z) \mapsto q(u) + L(u)z + cz^2$
est non dégénérée.

PROP34 Une conique propre à centre f228
(d'image non vide) a une équation de
la forme :

- $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ (ellipse)
- $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ (hyperbole).

Rq35 Si la conique n'est pas propre : f229
• $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0$ (point)
• $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$ (deux droites sécantes)

PROP36 Une conique propre sans centre f231
(d'image non vide) a une équation de
la forme $y^2 = bx$ (à changement de base près)
et c'est une parabole.

Rq37 Si la conique n'est pas propre alors f230
son équation est de la forme $ay^2 + c = 0$.
C'est deux droites parallèles (éventuellement
confondues).

Refs

[GOU] GOURDON, Polyèdres

[AUD] AUDIN, Géométrie