

- Développement 1 : Analyticité des fonctions holomorphes (Synthèse 33.)
- Développement 2 : Prolongement de la fonction Gamma (Application 51.)

Dans tout ce qui suit, Ω désigne un ouvert de $\mathbb{C}$.

Séries entières et analyticité

Rayon de convergence

Définition 1. Soient $z \in \mathbb{C}$, et $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. On appelle **série entière**, une série de fonctions de la forme :

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n z^n$$

Proposition 2. (Lemme D'Abel) Soient $r, r_0 \in \mathbb{R}$, tels que $0 < r < r_0$, et $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$.

Supposons que $(a_n r_0^n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ soit bornée, alors la série de fonctions $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n z^n$ converge normalement pour

tout $|z| \leq r$.

Corollaire 3. Soit $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n z^n$ une série entière et $R = \sup\{r \geq 0 \mid \exists M > 0, |a_n r^n| \leq M\}$. Alors :

- pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < R$, la série $\sum a_n z^n$ converge absolument ;
- pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| > R$, la série $\sum a_n z^n$ diverge ;
- pour tout r tel que $0 \leq r < R$, la série $\sum a_n z^n$ converge normalement sur $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq r\}$.

Le nombre R ainsi définit, est appelé le **rayon de convergence** de la série entière, et $D(O, R)$ son **disque de convergence**.

Proposition 4. Soit $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n z^n$ une série entière et $R \geq 0$ son rayon de convergence.

- (Règle de d'Alembert) si $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lambda$ alors $R = \frac{1}{\lambda}$
- (Règle de Cauchy-Hadamard) si $\limsup_{n \rightarrow +\infty} |a_n|^{\frac{1}{n}} = \lambda$ alors $R = \frac{1}{\lambda}$

Exemple 5. Soit $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n z^n$ une série entière et $R \geq 0$ son rayon de convergence.

- si $a_n = \frac{1}{n!}$ alors $R = +\infty$;
- si $a_n = n^\alpha$ pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, alors $R = 1$.
- si $a_n = n!$ alors $R = 0$, autrement dit la série ne converge nulle part.

Contre-exemple 6. La série entière $\sum_{n \in \mathbb{N}} z^{2n}$ ne relève des critères de Cauchy et d'Alembert.

Remarque 7. On admet les résultats sur la somme et le produit de séries entières.

Analyticité

Définition 8. Une fonction $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ est dite **analytique** sur Ω si pour tout $z_0 \in \Omega$ il existe $D(z_0, r) \subset \Omega$, que tel que pour tout $z \in D(z_0, r)$ on ait :

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

On note $\mathcal{A}(\Omega)$, l'espace des fonctions analytiques.

Exemple 9. La fonction $f : z \rightarrow \frac{1}{z}$ est analytique sur $\mathbb{C}^*$.

Exemple 10. L'exponentielle complexe est analytique sur $\mathbb{C}$ et on a :

$$e^z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$$

Théorème 11. (Principe des zéros isolés) Supposons Ω connexe. Soit f une fonction analytique sur Ω , alors si f n'est pas identiquement nulle, ses zéros sont isolés.

Théorème 12. (Principe du prolongement analytique) Supposons Ω connexe. Soient f et g deux fonctions analytiques sur Ω , qui coïncident sur un ouvert non vide $U \subset \Omega$. Alors $f = g$ sur Ω tout entier.

Théorème 13. (Admis) La somme d'une série entière est analytique à l'intérieur de son disque de convergence.

Fonctions holomorphes

Définition 14. Une fonction $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ est dite **$\mathbb{C}$ -dérivable**, en $a \in \Omega$, si la limite :

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

existe dans $\mathbb{C}$. On dit que f est **holomorphe**, si de plus sa dérivée est continue.

On notera par $\mathcal{H}(\Omega)$ l'espace des fonctions holomorphes.

Théorème 15. L'espace $\mathcal{H}(\Omega)$ est une algèbre, où l'on retrouve les règles usuelles de dérivations.

Exemple 16. La fonction $z \rightarrow z$ est $\mathbb{C}$ -dérivable sur $\mathbb{C}$, de dérivée 1.

Contre-exemple 17. La fonction $z \rightarrow \bar{z}$ n'est $\mathbb{C}$ -dérivable en aucun point de $\mathbb{C}$, bien qu'elle soit C^∞ (sur $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$).

Théorème 18. Soit $f \in \mathcal{A}(\Omega)$, alors $f \in \mathcal{H}(\Omega)$, et $f' \in \mathcal{A}(\Omega)$. On a en fait pour tout $z \in D(a, r) \subset \Omega$:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} z^n (z-a)^n$$

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} n z^n (z-a)^{n-1}$$

Corollaire 19. Toute fonction analytique est infiniment dérivable, et est somme de sa série de Taylor.

Condition de Cauchy Riemann

En identifiant le plan complexe à $\mathbb{R}^2$, on écrit qu'une fonction complexe f s'écrit :

$$f(z) = f(x, y) = P(x, y) + iQ(x, y)$$

Théorème 20. une fonction est $\mathbb{C}$ -dérivable si et seulement si l'une des conditions suivantes est satisfaite :

1. est elle différentiable en (x, y) et $\partial_x f + i\partial_y f = 0$.
2. est elle différentiable de différentielle $\mathbb{C}$ -linéaire.

Corollaire 21. Une fonction $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ est $\mathbb{C}$ -dérivable, si et seulement si :

$$\begin{cases} \frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y} \\ \frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{\partial Q}{\partial x} \end{cases}$$

Contre-exemple 22. Importance de la différentiabilité La fonction $f : z \rightarrow \sqrt{|xy|}$ vérifie les conditions de Cauchy-Riemann mais n'est pas $\mathbb{R}$ -différentiable partout. (à éclairer)

3 Analyticité et holomorphie

Intégration sur un chemin

Définition 23. On appelle **chemin** toute application $\gamma : [a, b] \rightarrow \Omega$ continue, et C^1 par morceaux. Si $\gamma(a) = \gamma(b)$, on dit que γ est un lacet. Soit $\gamma : [a, b] \rightarrow \Omega$, et f une fonction continue sur Ω . On définit l'intégrale de f le long de γ par :

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_a^b f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt$$

Explication pourquoi on intègre sur un chemin audin chap3

Définition 24. (Indice) Soit γ un lacet, et supposons que $\Omega = \mathbb{C} - \text{Im}(\gamma)$. Pour tout $z \in \Omega$ on définit l'indice de z par rapport à γ par :

$$\text{Ind}_{\gamma}(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{d\xi}{\xi - z}$$

Théorème 25. La fonction $\text{Ind} : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ est à valeurs entières, constante sur chaque composante connexe de Ω , et nulle sur la composante connexe de Ω non bornée.

Corollaire 26. Soit γ un cerle $C(a, r)$ orienté dans le sens direct. Alors on a :

$$\text{Ind}_{\gamma}(z) = \begin{cases} 1 & \text{si } |z - a| < r \\ 0 & \text{si } |z - a| > r \end{cases}$$

Insérer une figure explicative ici.

Primitives

Proposition 27. (Existence de primitive) Soit $f \in \mathcal{H}(\Omega)$, f' est donc continue. Alors pour tout lacet γ dans Ω , on a :

$$\int_{\gamma} f'(z) dz = 0$$

Exemple 28. Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on a pour tout lacet :

$$\int_{\gamma} z^n dz = \begin{cases} 0 & \text{si } n \neq 0 \\ 2i\pi & \text{si } n = 0 \end{cases}$$

Théorème 29. (Goursat) Soit $\Delta \subset \Omega$ un triangle fermé. Soit $a \in \Omega$, et soit f continue sur Ω et holomorphe sur $\Omega \setminus \{a\}$. On a alors :

$$\int_{\partial\Delta} f(z) dz = 0$$

Théorème 30. (Cauchy) Supposons Ω convexe. Soit $a \in \Omega$, et soit f continue sur Ω et holomorphe sur $\Omega \setminus \{a\}$. Alors pour tout lacet γ , on a :

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 0$$

Théorème 31. (Formule de Cauchy) Supposons Ω convexe, et soit $f \in \mathcal{H}(\Omega)$, et γ un lacet inclu dans Ω . Alors pour tout $z \notin \text{Im}(\gamma)$, on a :

$$f(z) \text{Ind}_{\gamma}(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi$$

Théorème 32. Soit $f \in \mathcal{H}(\Omega)$, et $z \in \Omega$. Alors :

1. $f \in \mathcal{A}(\Omega)$
2. si Ω est convexe, et que γ un lacet tel que $z \notin \text{Im}(\gamma)$, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$f^{(n)}(z) \text{Ind}_{\gamma}(z) = \frac{n!}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^{n+1}} d\xi$$

Synthèse 33. DÉVELOPPEMENT 1 Si $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ alors $f \in \mathcal{A}(\Omega)$.

Corollaire 34. Si $f \in \mathcal{H}(\Omega)$, alors $f' \in \mathcal{H}(\Omega)$.

Théorème 35. (Morera) Soit f une fonction continue sur Ω , telle que pour tout triangle fermé $\Delta \subset \Omega$ on ait :

$$\int_{\partial\Delta} f(z) dz = 0.$$

Alors $f \in \mathcal{H}(\Omega)$.

Remarque 36. Le théorème de Morera constitue une réciproque du théorème 30. de Cauchy.

4 Propriétés des fonctions holomorphes

Inégalités de Cauchy et conséquences

Théorème 37. (Inégalités de Cauchy) Soient $R \in \mathbb{R}_+$, et $f \in \mathcal{H}(D(0, R))$. Alors pour tout $r \in]0, R[$, et tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$|c_n| = \frac{1}{n!} |f^{(n)}(0)| \leq \frac{\sup_{|z|=r} |f(z)|}{r^n}$$

Application 38. (Liouville) Soit $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$. Si f est bornée, alors elle est constante.

Application 39. (D'Alembert) Tout polynôme de $\mathbb{C}[X]$ non constant, a au moins une racine dans $\mathbb{C}$.

Suites, séries, intégrales à paramètres

Définition 40. (Convergence) Soit $F = (f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonction définie sur Ω . On dit que F **converge uniformément sur les compacts de Ω** , si pour tout $K \subset \Omega$ compact, la suite $F|_K$ converge uniformément vers f .

Théorème 41. (Weierstrass) Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{H}(\Omega)^{\mathbb{N}}$ qui converge uniformément vers une fonction f sur tout compact de Ω .

Alors $f \in \mathcal{H}(\Omega)$, et la suite $(f'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers f' sur les compacts de Ω .

Corollaire 42. Série de fonctions holomorphes

Exemple 43. La fonction $\zeta(s) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n^s}$ définit une fonction holomorphe pour $z \in \{s \in \mathbb{C} | \operatorname{Re}(s) > 1\}$.

Théorème 44. (Holomorphie sous l'intégrale)

Soit $(E, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré, et soit $F : \Omega \times E \rightarrow \mathbb{C}$. Supposons que :

1. pour tout $z \in \Omega$, l'application $t \rightarrow F(z, t)$ est mesurable.
2. pour tout $t \in E$, l'application $z \rightarrow F(z, t)$ est holomorphe sur Ω .
3. pour tout compact $K \subset \Omega$, il existe une fonction g intégrable sur E , telle que pour tout $(z, t) \in K \times E$ on ait : $|F(z, t)| \leq g(t)$.

Alors la formule $f(z) = \int_E F(z, t) d\mu(t)$ définit une fonction **holomorphe** sur Ω . De plus, toutes les dérivées de f s'obtiennent par dérivation sous le signe l'intégrale.

Application 45. La fonction $\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} t^{z-1} e^{-t} dt$ définit une fonction holomorphe pour $z \in \{s \in \mathbb{C} | \operatorname{Re}(s) > 1\}$.

5 Fonctions méromorphes

Définition 46. Soit f une fonction complexe et $a \in \Omega$. S'il existe $r > 0$ tel que $f \in \mathcal{H}(B(a, r) \setminus \{a\})$, on dit que f a une **singularité isolée** en a .

Définition 47. Soit a une singularité d'une fonction f . S'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $(z-a)^n f(z)$ est holomorphe en a on dit que a est un **pôle d'ordre n** .

Si $n = 1$, on dit que a est un **pôle simple**.

Définition 48. On dit qu'une fonction f est **méromorphe** sur Ω , s'il existe un ensemble discret $\mathcal{P} \subset \Omega$, tel que $f \in \mathcal{H}(\Omega \setminus \mathcal{P})$, et tel que tout point de $\mathcal{P}$ est un pôle de f .

Exemple 49. Les fractions rationnelles sont des fonctions méromorphes, et leurs pôles sont les racines du dénominateur.

Théorème 50. Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions méromorphes sur Ω .

Supposons que :

1. pour tout compact $K \subset \Omega$, il existe $N_K \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N_K$, mes f_n n'ont pas de pôles dans K ;
2. la série $\sum_{n \geq N_K} f_n$ converge uniformément sur K ;

alors la somme de la série $\sum_{n \geq 0} f_n$ est méromorphe sur Ω et on peut dériver la série terme à terme.

Application 51. DÉVELOPPEMENT 2 La fonction Γ se prolonge en une fonction méromorphe sur $\mathbb{C}$, et admet pour pôles simples les entiers négatifs.

Bibliographie

- XAVIER GOURDON : Les maths en tête.
- WALTER RUDIN : Analyse réelle et complexe.
- PATRICE TAUVEL : Analyse complexe.
- E. AMAR , E. MATHÉRON : Analyse complexe