

Leçon 245 – Fonctions holomorphes sur un ouvert de $\mathbf{C}$. Exemples et applications.

Cadre : Ω désigne un ouvert du plan complexe et $f : \Omega \longrightarrow \mathbf{C}$ une application, on notera $D(a, r)$ un disque ouvert et $C(a, r)$ son bord.

But de la leçon : découvrir les merveilleuses propriétés des fonctions holomorphes, pourtant simple généralisation de la dérivabilité réelle, puis appliquer le théorème des résidus et étudier les fonctions spéciales Γ et ζ .

1 Holomorphie, différentiabilité, analytité

Déf 1.1. On dit que f est holomorphe sur Ω lorsque pour tout $a \in \Omega$, $\lim_{z \rightarrow a} \frac{f(z) - f(a)}{z - a}$ existe dans $\mathbf{C}$. Dans ce cas on note $f'(a)$ cette limite et l'application obtenue est appelée dérivée de f sur Ω .

Rmq 1.2. On note $H(\Omega)$ l'ensemble des fonctions holomorphes sur Ω . C'est une $\mathbf{C}$ -algèbre contenant les fonctions polynomiales sur Ω mais pas $z \mapsto \bar{z}$.

Ex 1.3. Si $f \in H(\Omega)$ ne s'annule pas sur Ω , alors $1/f \in H(\Omega)$.

Rmq 1.4. Comme $\mathbf{C} \simeq \mathbf{R}^2$ on peut voir $f : \Omega \subset \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}^2$ comme une fonction de deux variables. On note $u = \operatorname{Re}(f)$ et $v = \operatorname{Im}(f)$.

Thm 1.5 (Équations de Cauchy-Riemann). Soit $a \in \Omega$, alors f est holomorphe en a si et seulement si f est différentiable en a et

$$\frac{\partial u}{\partial x}(a) = \frac{\partial v}{\partial y}(a) \quad \frac{\partial u}{\partial y}(a) = -\frac{\partial v}{\partial x}(a).$$

Dans ce cas $Df(a) : h \mapsto f'(a)h$ est une similitude du plan.

Appl 1.6. Si Ω est connexe et $f \in H(\Omega)$, alors f est constante ssi $f' = 0$ ssi u est constante ssi v est constante ssi $|f|$ est constant.

Déf 1.7. On dit que $f : \Omega \longrightarrow \Omega'$ est un biholomorphisme si f est bijective, holomorphe et d'inverse holomorphe.

Thm 1.8 (Inversion locale holomorphe). Soient $f \in H(\Omega)$ et $a \in \Omega$ tel que $f'(a) \neq 0$. Alors il existe U (resp. V) un voisinage ouvert de a (resp. $f(a)$) tels que $f : U \xrightarrow{\sim} V$ est un biholomorphisme.

Thm 1.9 (Analytique $\implies$ Holomorphe). Si f est développable en série entière dans Ω (DSE) alors f est holomorphe sur Ω et f' est également DSE dans Ω . Précisément, si $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ pour $|z-a| < r$, alors $f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n(z-a)^{n-1}$ pour $|z-a| < r$. Par conséquent, f est indéfiniment dérivable et $c_n = f^n(a)/n!$.

Ex 1.10. L'exponentielle $\exp : z \in \mathbf{C} \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} z^n/n!$ est holomorphe sur tout $\mathbf{C}$ de dérivée elle-même et définit un morphisme de groupe de $(\mathbf{C}, +)$ vers $(\mathbf{C}^*, \times)$ qui transforme droite verticale en cercle. (faire un dessin en annexe)

2 Théorie de Cauchy locale et conséquences

Déf 2.1. Une courbe est une application $\gamma : [\alpha, \beta] \subset \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{C}$ continue et de classe C^1 par morceaux. On dit que γ est fermée lorsque $\gamma(\alpha) = \gamma(\beta)$. On note $\gamma^* \subset \mathbf{C}$ son image (compacte). Si f est continue sur γ^* on définit

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_{\alpha}^{\beta} f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt.$$

Cela ne dépend pas d'un reparamétrage C^1 et bijectif de γ .

Déf 2.2 (Indice). Soit γ une courbe et $a \notin \gamma^*$, l'indice de γ en a est

$$\operatorname{Ind}_{\gamma}(a) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{dz}{z-a}.$$

Thm 2.3. Soit $\Omega = \mathbf{C} \setminus \gamma^*$ ouvert. L'application $a \in \Omega \mapsto \operatorname{Ind}_{\gamma}(a)$ est à valeur entière, constante sur les composantes connexes de Ω et nulle sur la composante connexe non bornée de Ω . (donner un exemple en annexe)

Thm 2.4 (Cauchy convexe). Soient $f \in H(\Omega)$, Ω convexe, γ une courbe fermée de Ω , alors $\int_{\gamma} f(z) dz = 0$. De plus, pour tout $a \in \Omega \setminus \gamma^*$, on a

$$f(a) \operatorname{Ind}_{\gamma}(a) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z-a} dz.$$

Thm 2.5 (Holomorphe $\implies$ Analytique). Toute fonction holomorphe est DSE dans Ω . Précisément, pour tout $a \in \Omega$, pour tout $r > 0$ tel que $\bar{D}(a, r) \subset \Omega$, pour tout $z \in \bar{D}(a, r)$,

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n, \quad \text{où } c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!} = \frac{1}{2i\pi} \int_{C(a,r)} \frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}} dw.$$

Dans la suite on conserve ces notations.

Cor 2.6. Si $f \in H(\Omega)$, alors $f' \in H(\Omega)$ et donc f est indéfiniment dérivable.

Prop 2.7 (Formule de la moyenne). La valeur de f en a est la valeur moyenne de f sur tout cercle centré en a et inclus dans Ω : $f(a) = \int_0^{2\pi} f(a + re^{i\theta}) d\theta / 2\pi$.

Prop 2.8 (Parseval).

$$\sum_{n=0}^{\infty} |c_n|^2 r^{2n} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(a + re^{i\theta})|^2 d\theta$$

Prop 2.9 (Inégalités de Cauchy).

$$|c_n| = \left| \frac{f^{(n)}(a)}{n!} \right| \leq \frac{1}{r^n} \sup_{|z-a|=r} |f(z)|$$

Prop 2.10 (Liouville). Soit $f \in H(\mathbf{C})$ vérifiant $f(z) = \frac{O}{|z| \rightarrow \infty} (z^d)$ pour un entier $d \geq 1$, alors f est un polynôme de degré $\leq d$.
En particulier, toute fonction entière bornée est constante.

Appl 2.11. Le corps $\mathbf{C}$ est algébriquement clos.

3 Comportement des fonctions holomorphes en un point

3.1 Zéros des fonctions holomorphes et principe du maximum

Thm 3.1 (Théorème des zéros isolés). Soit f holomorphe sur Ω connexe. Si f n'est pas identiquement nulle, alors $Z(f) = \{a \in \Omega, f(a) = 0\}$ est sans point d'accumulation dans Ω .

Dans ce cas, pour tout a zéro de f , il existe $m \geq 1$ entier (appelé ordre de f en a) et $g \in H(\Omega)$ non nul en a tels que pour tout $z \in \Omega$, $f(z) = (z - a)^m g(z)$.

Rmq 3.2. Dans ce cas $Z(f)$ est au plus dénombrable.

Cor 3.3 (Principe du prolongement analytique). Soient f et g holomorphes sur Ω connexe. Si $f = g$ sur un ensemble possédant un point d'accumulation dans Ω alors $f = g$ sur tout Ω .

Rmq 3.4. Il est important que le point d'accumulation soit dans Ω . Considérer $z \mapsto \sin(\pi/z)$ dans le demi-plan $\{\operatorname{Re} > 0\}$.

Appl 3.5. La transformée de Fourier de la gaussienne $t \in \mathbf{R} \mapsto e^{-t^2/2}$ est la gaussienne $\xi \in \mathbf{R} \mapsto \sqrt{2\pi} e^{-\xi^2/2}$.

Thm 3.6 (Principe du maximum). Soit f une fonction holomorphe non constante sur Ω connexe. Alors $|f|$ ne possède pas de maximum local sur Ω .

Cor 3.7. Soient Ω un ouvert borné et f holomorphe sur Ω , continue sur $\overline{\Omega}$, alors $|f|$ atteint son supremum sur la frontière de Ω .

Appl 3.8 (Lemme de Schwarz). Soit $f : D(0, 1) \rightarrow D(0, 1)$ holomorphe telle que $f(0) = 0$, alors pour tout $|z| < 1$, $|f(z)| \leq |z|$ et $|f'(0)| \leq 1$. De plus, s'il existe $0 < |z_0| < 1$ tel que $|f(z_0)| = |z_0|$ ou si $|f'(0)| = 1$, alors f est une rotation autour de l'origine.

3.2 Le théorème de l'image ouverte

Thm 3.9. Soit f holomorphe non constante sur Ω connexe. Soient $a \in \Omega$ et $m \geq 1$ l'ordre de $f - f(a)$ en a . Alors il existe $V \subset \Omega$ voisinage ouvert de a , $r > 0$ et $\varphi : V \xrightarrow{\sim} D(0, r)$ biholomorphisme tels que pour tout $z \in V$, $f(z) = f(a) + \varphi(z)^m$.

Cor 3.10. Sous les hypothèses précédentes, f est ouverte. Donc $f(\Omega)$ est un ouvert connexe.

Cor 3.11. Si de plus f est injective, alors f' ne s'annule pas sur Ω et $f : \Omega \xrightarrow{\sim} f(\Omega)$ est un biholomorphisme.

Appl 3.12. 1. $\operatorname{Bih}(\mathbf{C}) = \{z \mapsto az + b, a \neq 0\}$,
2. $\operatorname{Bih}(D(0, 1)) = \left\{ z \mapsto e^{i\theta} \frac{z - a}{1 - \bar{a}z}, \theta \in \mathbf{R}, |a| < 1 \right\}$.

Appl 3.13. $\exp : \{z \in \mathbf{C}, |\operatorname{Im}(z)| < \pi\} \rightarrow \mathbf{C} \setminus \mathbf{R}_-$ est un biholomorphisme, on note $\log$ sa bijection réciproque holomorphe. C'est la détermination principale du logarithme :

$$\forall r > 0, \forall -\pi < \theta < \pi, \log(re^{i\theta}) = \ln(r) + i\theta.$$

3.3 Points singuliers des fonctions holomorphes

Thm 3.14 (Riemann). Soit $f \in H(\Omega \setminus \{a\})$. Si f est bornée au voisinage de a , alors f se prolonge holomorphiquement en a . On dit alors que a est une singularité illusoire pour f .

Ex 3.15. $z \neq 0 \mapsto \frac{\sin(z)}{z}$ se prolonge en une fonction entière.

Thm 3.16. Soit $f \in H(\Omega \setminus \{a\})$. L'un des trois cas suivants doit se produire :

1. f possède une singularité illusoire en a ,
2. f possède un pôle d'ordre $m \geq 1$ en a , i.e. il existe $c_1, \dots, c_m \in \mathbf{C}$ tels que $z \mapsto f(z) - \sum_{k=1}^m c_k/(z - a)^k$ possède une singularité illusoire en a ,
3. f possède une singularité essentielle en a , i.e. $\forall r > 0$ tel que $D(a, r) \subset \Omega$, $f(D(a, r) \setminus \{a\})$ est dense dans $\mathbf{C}$.

Dans les cas 2 et 3, on dit que a est un point singulier de f .

Ex 3.17. $z \neq 0 \mapsto e^{1/z}$ possède une singularité essentielle en 0.

Prop 3.18 (Comportement d'une série entière sur son cercle de convergence). Soit $\sum_{n \geq 0} c_n z^n$ une série entière de rayon de convergence 1 et de somme f sur $D(0, 1)$. Alors :

- il existe toujours $|a| = 1$ où f n'est pas prolongeable holomorphiquement,
- si $c_n \geq 0$ pour tout n , alors 1 est un point singulier de f .

4 Théorème des résidus et calcul d'intégrales

Déf 4.1. Une fonction $f : \Omega \rightarrow \mathbf{C}$ est dite méromorphe s'il existe $A \subset \Omega$ sans point d'accumulation dans Ω tel que f soit holomorphe sur $\Omega \setminus A$ et que tout point de A est un pôle pour f . En chaque point $a \in A$ on note $\text{Res}(f, a) = c_1$ le résidu de f en a . C'est le coefficient de $1/(z - a)$.

Ex 4.2. Si $f(a) \neq 0$ et si a est un zéro simple de g alors $\text{Res}\left(\frac{f}{g}, a\right) = \frac{f(a)}{g'(a)}$.

Ex 4.3. Une fraction rationnelle P/Q est une fonction méromorphe sur $\mathbf{C}$ dont les pôles sont les zéros de Q , leur ordre étant leur multiplicité.

Thm 4.4 (Théorème des résidus). Soit f une fonction méromorphe sur un ouvert Ω simplement connexe. Soit A l'ensemble des pôles de f dans Ω et soit γ une courbe fermée dans $\Omega \setminus A$. Alors

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} f(z) dz = \sum_{a \in A} \text{Res}(f, a) \text{Ind}_{\gamma}(a).$$

Appl 4.5. (faire les contours en annexe, voir la première référence page 163)

$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{3 + 2\cos(t)} = \frac{2\pi}{\sqrt{5}}, \quad \int_0^{\infty} \frac{dt}{1 + t^n} = \frac{\pi/n}{\sin(\pi/n)}, \quad \int_0^{\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt = \frac{\pi}{2}.$$

5 Convergence des suites de fonctions holomorphe et applications

5.1 Convergence uniforme sur tout compact

Thm 5.1 (Morera). Une fonction f est holomorphe sur Ω ssi f est continue sur Ω et pour tout triangle $\Delta \subset \Omega$, $\int_{\partial\Delta} f(z) dz = 0$.

Thm 5.2 (Weierstrass). Soit $(f_n)_{n \geq 0}$ une suite de $H(\Omega)$ convergeant uniformément sur tout compact de Ω vers $f : f_n \xrightarrow[u.c.]{} f$. Alors $f \in H(\Omega)$ et $f'_n \xrightarrow[u.c.]{} f'$.

Rmq 5.3. On a alors, pour tout $k \geq 0$, $f_n^{(k)} \xrightarrow[u.c.]{} f^{(k)}$.

Cor 5.4. Soit $\sum_{n \geq 0} f_n$ une série de fonctions holomorphes sur Ω convergeant uniformément sur tout compact de Ω . Alors sa somme f est définie et holomorphe sur Ω .

Application : les séries de Dirichlet.

Déf 5.5. Soit $(a_n)_{n \geq 0}$ une suite de $\mathbf{C}$. La série de Dirichlet associée est la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} a_n/n^s$ de la variable complexe $s = \sigma + it$. On note

$$\sigma_c = \inf \left\{ \sigma \in \mathbf{R}, \sum_{n \geq 1} \frac{a_n}{n^s} \text{ CV} \right\}, \quad \sigma_{ac} = \inf \left\{ \sigma \in \mathbf{R}, \sum_{n \geq 1} \frac{a_n}{n^s} \text{ CVA} \right\},$$

les abscisses de convergence et de convergence absolue de cette série.

Prop 5.6. Si $\sigma_c < \infty$, alors

- $\sum_{n \geq 1} a_n/n^s$ converge sur $\{\sigma > \sigma_c\}$ (où sa somme f y est holomorphe) et diverge sur $\{\sigma < \sigma_c\}$,
- on a toujours $\sigma_c \leq \sigma_{ac} \leq \sigma_c + 1$,
- pour tout $s \in \{\sigma > \sigma_c\}$, pour tout $N \geq 1$, $f(s) = \sum_{n=1}^N a_n/n^s + o_{N \rightarrow \infty}(1/N^\sigma)$,
- s'il existe une suite (s_k) de zéro de f telle que $\sigma_k \rightarrow \infty$, alors $a_n = 0$ pour tout n .

Prop 5.7 (Produit infini). Soit $(f_n) = (1 + \epsilon_n)$ une suite de $H(\Omega) \setminus \{0\}$ telle que $\sum \epsilon_n$ converge normalement sur tout compact de Ω . Alors $\prod f_n$ converge uniformément sur tout compact de Ω vers f holomorphe, avec de plus

$$f(z) = 0 \iff \exists n, f_n(z) = 0.$$

5.2 Prolongements des fonctions Γ et ζ , applications

Thm 5.8 (Théorème d'holomorphie sous l'intégrale). Soit $I \subset \mathbf{R}$ un intervalle, soit $f : \Omega \times I \rightarrow \mathbf{C}$ vérifiant :

- $\forall z \in \Omega, t \in I \mapsto f(z, t)$ est mesurable,
- $\forall t \in I, z \in \Omega \mapsto f(z, t)$ est holomorphe,
- $\forall K \subset \Omega$ compact, $\exists g \in L^1(I), \forall z \in K, \forall t \in I, |f(z, t)| \leq g(t)$.

Alors $F : z \in \Omega \mapsto \int_I f(z, t) dt$ est holomorphe. De plus $\partial f / \partial z$ satisfait aux mêmes

hypotheses que f et on a $F'(z) = \int_I \frac{\partial f}{\partial z}(z, t) dt$.

Déf 5.9. (Fonction Γ d'Euler) On définit pour tout $z \in \mathbf{C}$ de partie réelle $\text{Re}(z) > 0$, $\Gamma(z) = \int_0^{\infty} t^{z-1} e^{-t} dt$.

Prop 5.10. Γ est une fonction holomorphe sur le demi-plan $\{\text{Re}(z) > 0\}$ vérifiant l'équation fonctionnelle $\Gamma(z + 1) = z\Gamma(z)$. En particulier, comme $\Gamma(1) = 1$, on a $\Gamma(n + 1) = n!$ pour tout entier $n \geq 0$.

Thm 5.11 (Prolongement de Γ). La fonction Γ se prolonge holomorphiquement à $\mathbf{C} \setminus (-\mathbf{N})$ avec des pôles simple aux entiers $-n$ ($n \geq 0$) de résidus $(-1)^n/n!$.

Thm 5.12 (Formule de Weierstrass). La fonction $1/\Gamma$ est entière et vérifie :

$$\forall z \in \mathbf{C}, \quad \frac{1}{\Gamma}(z) = ze^{\gamma z} \prod_{n=1}^{\infty} (1 + z/n)e^{-z/n}.$$

Déf 5.13 (Fonction ζ de Riemann). La fonction ζ est définie sur le demi-plan $\{\operatorname{Re}(s) > 1\}$ par : $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} 1/n^s$.

Prop 5.14. ζ est une fonction holomorphe sur le demi-plan $\{\operatorname{Re}(s) > 1\}$. Elle vérifie le développement en produit infini :

$$\forall \operatorname{Re}(s) > 1, \quad \zeta(s) = \prod_{p \text{ premier}} \frac{1}{1 - p^{-s}} \neq 0.$$

Lemme 5.15 (Admis). Pour $x > 0$ soit $\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2 \pi x}$, alors :

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \varphi\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{2}.$$

Thm 5.16 (Prolongement de ζ). ζ admet un prolongement holomorphe à $\mathbf{C} \setminus \{1\}$ avec un pôle simple en 1 de résidu 1.

Thm 5.17 (Équation fonctionnelle de ζ). Soit :

$$\xi(s) = \frac{s(s-1)}{2} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \pi^{-s/2} \zeta(s).$$

ξ est entière et possède une symétrie par rapport au point $1/2$:

$$\forall s \in \mathbf{C}, \quad \xi(s) = \xi(1-s).$$

Prop 5.18. ζ possède des zéros « triviaux » : $-2, -4, -6, \dots, -2n, \dots$ ($n \geq 1$). Ses autres zéros sont situés dans la bande critique $\{0 \leq \operatorname{Re}(s) \leq 1\}$.

Appl 5.19. Le fait (difficile) que ζ ne s'annule pas sur la droite $1 + i\mathbf{R}$ est un argument clé dans la démonstration (très difficile) du théorème des nombres premiers :

$$\operatorname{Card} \{p \leq x, \quad p \text{ premier}\} \underset{x \rightarrow \infty}{\sim} \frac{x}{\log(x)}.$$

Hyp 5.20 (Riemann, 1859). Les zéros non triviaux de ζ sont sur la droite $\{\operatorname{Re}(z) = 1/2\}$.

Remarques

Ce plan est là pour vous donner des idées. Faites un plan à votre niveau. La partie 3.2 n'est pas nécessaire et on peut raccourcir la partie 5.2. On aurait pu parler de la formule de Kronecker (après le théorème des résidus par exemple) et des théorèmes d'Hurwitz et de Runge (version faible et fort) en partie 5, voire de l'espace de Bergman du disque unité.

Développements possibles

- Comportement de la somme d'une série entière sur son cercle de convergence,
- Séries de Dirichlet,
- Prolongement de Γ et formule de Weierstrass,
- Prolongement de ζ et équation fonctionnelle,
- Espace de Bergman du disque unité,
- Théorème de Runge (version faible).

Références

- Analyse complexe et applications - Queffélec Queffélec
- Analyse pour l'agrégation - Queffélec Zuily
- Analyse réelle et complexe - Rudin