246 – Séries de Fourier. Exemples et applications.

Cadre : On définit les espaces de fonctions 2π-périodique de $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$ suivants :

- L'espace $C^0_{2\pi}$ des fonctions continues.
- L'espace $L^p_{2\pi}$ pour $1 \le p < \infty$ des (classes de) fonctions mesurables, tel que : $||f||_p = (\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(t)|^p dt)^{\frac{1}{p}} < \infty$
- $L^\infty_{2\pi}$ l'espace des (classes de) fonctions mesurables, tel que : $||f||_\infty < \infty$, avec $||f||_\infty$ la borne supérieure essentielle de $|f|$

En particulier, $L^2_{2\pi}$ est un espace de Hilbert muni du produit scalaire

$$\langle f|g\rangle = \int_0^{2\pi} f(t)\overline{g(t)}dt$$

On définit aussi le produit de convolution sur $L^1_{2\pi}$: $f*g : x \mapsto \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)g(x-t)dt$ (cette formule a un sens presque partout sur $[0,2\pi]$).

1 Coefficients de Fourier [G][ZQ]

1.1 Définitions

Définition 1. 1 Soit$f \in L^1_{2\pi}$ et $n \in \mathbb{Z}$. On définit le n-ème coefficient de Fourier de f par la formule $c_n(f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)e^{-int}dt$.

L'ensemble $\{|c_n(f)| \mid n \in \mathbb{Z}\}$ est parfois appelé spectre en fréquence de f. **On fera apparaitre en annexe certains spectres des exemples étudiés dans la suite.**

Définition 2. Soit f dans $L^1_{2\pi}$ et $N \in \mathbb{N}$. On définit la somme partielle de Fourier d'indice N de f par $S_N(f) = \sum_{n=-N}^{N} c_n(f)e_n$, avec $e_n : t \mapsto e^{int}$.

Remarque 3.
- On sait que pour $1 \le q \le \infty$, on a $L^q_{2\pi} \subset L^1_{2\pi}$. Les sommes de Fourier partielle de f sont donc bien définies dès que $f \in L^q_{2\pi}$.
- En particulier, si $f \in L^2_{2\pi}$, on à $c_n(f) = \langle f|e_n\rangle$.

Exemple 4.
- Soit $(k,n) \in \mathbb{Z}^2$. On a $c_k(e_n) = \delta_{n,k}$. En conséquence, la famille $\{e_n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ forme une base orthonormée de $L^2_{2\pi}$.
- Pour $t \mapsto \sin(t)$, on à $c_1(\sin) = \frac{1}{2i}$, $c_{-1}(\sin) = \frac{-1}{2i}$, et $c_n(\sin) = 0$ si $n \neq 1$ et $n \neq -1$
- Pour $t \mapsto \cos(t)$, on à $c_1(\cos) = \frac{1}{2}$, $c_{-1}(\cos) = \frac{1}{2}$, et $c_n(\cos) = 0$ si $n \neq 1$ et $n \neq -1$.

Définition 5. Soit f dans $L^1_{2\pi}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. On définit les coefficients suivants :

$$a_n(f) = \int_0^{2\pi} f(t)\cos(nt)dt \text{ et } b_n(f) = \int_0^{2\pi} f(t)\sin(nt)dt$$

La somme de Fourier partielle de f s'écrit alors :

$$S_N(f)(x) = \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{n=1}^{N} a_n(f)\cos(nx) + b_n(f)\sin(nx)$$

De plus, on a les relations suivantes entre les coefficients : $a_n(f) = c_n(f) + c_{-n}(f)$ et $b_n(f) = i(c_n(f) - c_{-n}(f))$

Remarque 6. Si f est paire, les $a_n(f)$ sont nuls, et on à $c_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\cos(nt)dt$.

Si f est impaire, les $b_n(f))$ sont nuls, et on à $c_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\sin(nt)dt$.

1.2 Propriétés des coefficients de Fourier

Proposition 7. *Soit $f \in L^1_{2\pi}$, $a \in \mathbb{R}$, $(k,n) \in \mathbb{Z}^2$, $g \in L^\infty_{2\pi}$. Alors :*
- $c_n(\tau_a f) = e^{ina}c_n(f)$ *où* $\tau_a f : t \mapsto f(t+a)$
- $c_n(e_k f) = c_{n-k}(f)$
- $f * e_n = c_n(f)e_n$
- $||f*g||_\infty \le ||f||_1||g||_\infty$
- *si de plus f est dans $C^0_{2\pi}$ et est C^1 par morceaux, $c_n(f') = inc_n(f)$*
- *Enfn, si de plus f est de classe C^k, alors $n^k c_n(f) \underset{|n|\to+\infty}{\longrightarrow} 0$*

Théorème 8 (Lemme de Riemann-Lebesgue). *Soit $f \in L^1_{2\pi}$. Alors $c_n(f) \underset{|n|\to+\infty}{\longrightarrow} 0$*

Corollaire 9. *L'application*

$$\begin{aligned} \gamma : \quad & L^1_{2\pi} \to C_0 = \{(u_n)_{n\in\mathbb{Z}} \text{ telle que } u_n \underset{|n|\to\infty}{\longrightarrow} 0\} \\ & f \mapsto (e_n(f))_n \end{aligned} \tag{1}$$

est linéaire et de norme 1.

De plus, on vérifie pour f et g dans $L^1_{2\pi}$: $\gamma(f*g) = \gamma(f)\gamma(g)$.

2 Convergence ponctuelle et uniforme [ZQ][G]

2.1 Le théorème de Dirichlet

Proposition 10 (Noyau de Dirichlet). *Pour $N \in \mathbb{N}$, on définit le noyau de Dirichlet d'ordre N par $D_N = \sum_{n=-N}^{N} e_n$. Il vérifie les propriétés suivantes :*

- D_N *est pair et* $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} D_N(t)dt = 1$
- $D_N(x) = \frac{\sin\left((N+\frac{1}{2})x\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$
- $D_N * f = S_N(f)$

Théorème 11 (Théorème de Dirichlet). *Soit $f \in L^1_{2\pi}$ et $x_0 \in [0, 2\pi]$. On suppose que f admet des limites a droites et à gauche en x_0 que l'on note $f(x_0-)$ et $f(x_0+)$ et que la fonction $h : h \mapsto \frac{f(x_0+h)+f(x_0-h)-f(x_0+)-f(x_0-)}{h}$ est bornée au voisinage de 0.*

Alors $S_N(f)(x_0) \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{f(x_0+)+f(x_0-)}{2}$

Corollaire 12. *Si f est 2π-périodique et de classe C^1 par morceaux, alors pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{N\to\infty} S_N(f)(x) = \frac{f(x+)+f(x-)}{2}$. De plus, si f est continue en x, alors on à $\lim\limits_{N\to\infty} S_N(f)(x) = f(x)$*

Exemple 13 (Fonction signal). Soit $\epsilon \in]0, \pi[$ et σ_ϵ la fonction de $L^\infty_{2\pi}$ telle que $\sigma_\epsilon(t) = 1$ si $|t| \leq \epsilon$ et $\sigma_\epsilon(t) = 0$ si $\epsilon < |t| \leq \pi$ (**voir dessin en annexe**). Alors pour tout t, $S_N(\sigma_\epsilon)(t) = \frac{\epsilon}{\pi} + \sum_{n=-N(n\neq 0)}^{N} \frac{\sin n\epsilon}{n\pi} e_n(t)$.

Puis grâce au théorème de Dirichlet appliqué en ϵ, on obtient : $\frac{\epsilon}{\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2n\epsilon)}{n\pi} = \frac{1}{2}$

Théorème 14 (Fonction Zeta aux entiers pairs). $f(z) = \frac{z}{e^z - 1}$ *est DSE en 0 et soit* $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n \frac{z^n}{n!}$ *son DSE. Alors* $\zeta(2k) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n^{2k}} = (-1)^{k-1}\frac{(2\pi)^{2k}}{2.(2k)!} b_{2k}$

2.2 Le théorème de Fejer uniforme

Proposition 15. *On définit le noyau de Fejer d'ordre $N > 0$: $K_N = \sum_{i=0}^{N-1} \frac{D_i}{N}$. Il vérifie :*

- $K_N(x) = \sum_{n=-N}^{N} \left(1 - \frac{|n|}{N} e_n\right) = \frac{1}{N}\left(\frac{\sin(\frac{Nx}{2})}{\sin\frac{x}{2}}\right)^2$
- $||K_N||_1 = 1$
- $0 < \delta \leq \pi \to \lim\limits_{N\to\infty} \frac{1}{2\pi}\int_{\delta<|x|<\pi} K_N(x)dx = 0$
- $\sigma_N(f) = f * K_N$ *où* $\sigma_N(f) = \frac{S_0(f)+...+S_{N-1}(f)}{N}$ *pour tout* $f \in L^1_{2\pi}$

Remarque 16. On a en fait que $(K_N)_{N\in\mathbb{N}}$ est une approximation de l'unité.

Théorème 17 (Théorème de Fejer 1). *Soit $f \in C^0_{2\pi}$. Alors $||\sigma_N(f)||_\infty \leq ||f||_\infty$ $\forall N \in \mathbb{N}^*$ et $\sigma_N(f)$ converge uniformément vers f.*

Corollaire 18.

- *Soit $f \in C^0_{2\pi}$ et $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que $S_N(f)(x_0) \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} l$. Alors $f(x_0) = l$.*
- *Soit $f \in C^0_{2\pi}$ telle que $\sum |c_n(f)| < \infty$. Alors f est développable en série de Fourier $f = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(f)e_n$*

Exemple 19 (Fonction triangle). Soit $\epsilon \in]0, pi[$, on définit T par $T(t) = 1 - \frac{|t|}{\epsilon}$ si $|t| \leq \epsilon$ et $T(t) = 0$ si $\epsilon \leq |t| \leq \pi$. T est développable en série de Fourier : $T(t) = \frac{\epsilon}{2\pi} + \sum_{N=-\infty(n\neq 0)}^{\infty} \frac{1-\cos(n\epsilon)}{n^2\pi\epsilon}\cos(nt)$. **Voir dessin en annexe.**

Contre-exemple 20. Si f n'est pas continue mais $S_N(f)(x_0)$ converge quand $N \to +\infty$, le corollaire précédent est mis en défaut. Par exemple pour $f(x) = \frac{x}{\pi} - 1$ pour tout $x \in [0, 2\pi[$, on a $c_n(f) = \frac{i}{n\pi}\mathbf{1}_{n\neq 0}$ donc $S_N(f)(0) \to 0$ mais $f(0) = 1 \neq 0$.

Corollaire 21. *Soit f et g dans $C^0_{2\pi}$. $\gamma(f) = \gamma(g) \iff f = g$.*

Corollaire 22 (Comparaison). *Soit $f \in C^0_{2\pi}$. Si $k > 1$ et $c_n(f) = O(|n|^{-k})$, alors $f \in C^{k-2}$.*

3 L'espace hilbertien $L^2_{2\pi}$ [ZQ]

Théorème 23 **(Théorème de Fejer 2).** *Soit $f \in L^p_{2\pi}$, alors pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, $||\sigma_N(f)||_2 \leq ||f||_2$ et $\sigma_N(f)$ converge vers f en norme $||.||_2$.*

Corollaire 24. *La famille $\{e_n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ forme une base hilbertienne de $L^2_{2\pi}$.*

Corollaire 25 **(Conséquences).**
— *Soit $f \in L^2_{2\pi}$, alors $f \overset{L^2_{2\pi}}{=} \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(f)e_n$ où l'égalité est au sens de la convergence $L^2_{2\pi}$.*
— *On a de plus l'égalité de Parseval : $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(t)|^2 dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n(f)|^2$*
— *L'application*

$$\begin{aligned} \gamma : \quad & L^2_{2\pi} \to l^2 \\ & f \mapsto (e_n(f))_n \end{aligned} \tag{2}$$

est une isométrie bijective

Corollaire 26 **(Convergence normale).** *Soit $f \in C^0_{2\pi}$ et de classe C^1 par morceaux. Alors $S_N(f)$ converge normalement vers f.*

Application 27 (Calcul de série numérique).
— *Soit $h : x \mapsto 1 - \frac{x^2}{\pi^2}$ périodique sur $[0, 2\pi]$. La décomposition en série de Fourier de h en $x = \pi$ donne $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$. En $x = 0$ on trouve $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = \frac{-\pi^2}{12}$. L'égalité de Parseval fournit $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$*
— *Soit g la fonction 2π-périodique définie par g(x)=1 si $0 \leq x < \frac{\pi}{2}$, g($\frac{\pi}{2}$)=0 et $g(x) = -1$ si $\frac{\pi}{2} < x \leq \pi$. L'égalité de Parseval donne $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$.*
— *Soit j la fonction 2π-périodique définie par $j(x) = |x|$ sur $[-\pi, \pi]$. L'égalité de Parseval donne alors $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^4} = \frac{\pi^4}{96}$*

4 Application aux équations aux dérivées partielles

On s'interesse à la résolution de l'équation de la chaleur :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(t,x) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x) & \forall (t,x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \\ u(0,x) = u_0(x) & \forall x \in \mathbb{R} \end{cases} \tag{3}$$

4.1 Résolution exacte

Théorème 28 **(Equation de la chaleur sur le cercle).** *Soit u_0 non-nulle $\in C^0_{2\pi}$, de classe C^1 par morceaux. On cherche $u : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ tel que :*
— *$\forall t \in \mathbb{R}^+$, $x \mapsto u(t,x)$ est 2π-périodique*
— *$u \in C^0(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R})$*
— *$u \in C^\infty(\mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R})$*

et qui vérifie (3)
Alors une telle solution est unique et est donnée par
$u(t,x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{-n^2 t} e^{inx}$ où les c_n sont les coefficients de Fourier de u_0

4.2 Résolution approchée

On considère dans cette section le schéma aux différences finies suivant pour la résolution numérique de l'équation de la chaleur :

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta_t} + \frac{-u_{j-1}^n + 2u_j^n - u_{j+1}^n}{(\Delta_x)^2} \tag{4}$$

Soit $u^n = (u^n)_{1 \leq j \leq N}$ la solution numérique donnée par le schéma ci-dessus.

Définition 29. On introduit la norme suivante : $||u^n||_2 = \left(\sum_{j=1}^N \Delta_x |u_j^n|^2\right)^{1/2}$.
Un schéma aux différences finies est dit stable pour la norme $||\ ||_2$, s'il existe une constante $K > 0$ indépendante de Δ_t et Δ_x telle que $||u^n|| \leq K||u^0||$ pour tout $n \geq 0$ quelle que soit la condition initiale u^0.

Méthode 30 **(Analyse de Von Neuman).**
— A chaque vecteur $u^n = (u^n)_{1 \leq j \leq N}$ on associe une fonction $u^n(x)$ constante par morceaux, périodique et de période 1, définie sur $[0, 1]$ par $u^n(x) = u_j^n$ si $x_{j-1/2} < x < x_{j+1/2}$. Ainsi définie, u^n est dans $L^2(0, 1)$.
— On la décompose en série de Fourier : $u^n(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k(u^n) e^{2i\pi kx}$.
On remarque que si $v^n(x) = u^n(x + \Delta_x)$, $c_k(v^n) = c_k(u^n)e^{2i\pi kx}$.
— On regarde les coefficients de Fourier du schéma (4) et on obtient une équation $c_k(u^{n+1}) = A(k)c_k(u^n)$. On appelle condition de stabilité de Von Neumann l'inégalité $|A(k)| \leq 1$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$. Si cette condition est vérifiée, le schéma est stable.

Application 31. *Le schéma (4) est stable seulement si la condition $2\Delta_t \leq (\Delta_x)^2$ est vérifiée.*