245 – Fonctions holomorphes sur un ouvert de C. Exemples et applications.

Référence : super livre de Jean-François Pabion.

Dans toute la leçon, Ω désigne un ouvert de $\mathbb{C}$. On suppose connue la théorie des séries entières.

1 Fonctions Holomorphes

1.1 Dérivabilité complexe et conditions de Cauchy-Riemmann

Définition 1. — Soit F une fonction de Ω dans $\mathbb{C}$ et $a \in \mathbb{C}$. On dit que F est dérivable (au sens complexe), au point a si la quantité $\frac{F(z)-F(a)}{z-a}$ a une limite finie l quand z tend vers a. On pose l=F'(a), le nombre dérivée de F en a.

— On dit que F est holomorphe sur Ω si elle est dérivable en tout point de Ω. On peut alors définir la fonction dérivée de F, F' sur Ω.

Exemple 2. — La fonction $z \mapsto z^2$ est définie et holomorphe sur $\mathbb{C}$, sa dérivée est $z \mapsto 2z$.

— La fonction $z \mapsto \bar{z}$ est définie partout mais n'est dérivable en aucun point.

— La fonction polynôme $z \mapsto \sum_{i=0}^{n} a_i z^i$ est holomorphe sur $\mathbb{C}$, et sa dérivée est $z \mapsto \sum_{i=0}^{n} i a_i z^{i-1}$.

Remarque 3. Cette notion coincide avec le notion de différentiabilité de $F : \Omega \mapsto \mathbb{C}$, avec $DF(a).h = F'(z).h$. On conserve alors toutes les propriétés classiques : somme, produit et quotient de fonction holomorphe, composée de fonctions holomorphes. On peut alors faire le lien avec la différentiabilité de F vu comme une fonction à variable dans $\mathbb{R}^2$.

Théorème 4 (Condition de Cauchy-Riemann). *Soit F une fonction définie au voisinage d'un point a. F est dérivable au sens complexe $\iff$ F est différentiable au sens $\mathbb{R}^2$ et vérifie $\frac{\partial F}{\partial y}(a) = i\frac{\partial F}{\partial x}(a)$.*

Remarque 5. Ces conditions s'écrivent aussi, en notant F(x+iy)=Re(F)(x,y)+i Im(F)(x,y), $\frac{\partial Re(F)}{\partial x}(x_a, y_a) = \frac{\partial Im(F)}{\partial x}(x_a, y_a)$ et $\frac{\partial Re(F)}{\partial y}(x_a, y_a) = -\frac{\partial Im(F)}{\partial x}(x_a, y_a)$

Exemple 6. — Soit F :$z \mapsto x^2 + 2ixy - y**2 - 3x - 3iy + 4$ (z=x+iy). Elle est holomorphe sur C.

— Soit F :$z \mapsto sin(x)\ ch(y) + i\ cos(x)\ sh(y)$ (z=x+iy). Elle est holomorphe sur C.

Application 7. *Détermination principal du logarithme complexe.*

1.2 Holomorphie des séries entières et lien avec l'analycité

Théorème 8. *Soit $f z \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R et $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}$ sa série dérivée. Alors :*

— *Ses deux séries ont mêmes rayon de convergence.*

— *A l'intérieur du disque de convergence, la série f est holomorphe et sa dérivée est $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}$.*

— *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$.*

Remarque 9. Ce résultat est une évolution du théorème usuel de dérivation des séries entières.

Application 10. *On introdruit les fonctions exponentielle, circulaires et hyperboliques complexes. Elles sont holomorphes sur $\mathbb{C}$.*

Application 11. *Pour $|z| < 1$, on considère l'égalité : $\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n$. Alors par dérivation, on à : $\forall k \in \mathbb{N}$: $\frac{1}{(1-z)^k} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+k-1}{n} z^n$.*

Application 12. *Décomposition d'un entier en part fixé.*

Définition 13. On dit que F est analytique en a si F est développable en série entière sur un voisinage de a. C'est-à-dire, il existe $r > 0$ tel que $D(a, r) \subset \Omega$ et une série entière $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ de rayon de convergence r tel que $\forall z \in D(a, r)$, $F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n$. F est dit analytique sur Ω si elle l'est en chacun des points de Ω.

Exemple 14. Un polynôme $z \mapsto P(z)$ est analytique en tout $a \in \mathbb{C}$, grâce à l'identité de Taylor.

Théorème 15. *Toute fonction analytique est holomorphe.*

Corollaire 16. *Soit F analytique en a, avec les mêmes notations que la définition précédente. On trouve par dérivation successives la relation : $a_n = \frac{F^{(n)}(a)}{n!}$. D'où l'écriture en "série de Taylor" suivante : $\forall z \in D(a, r)$, $F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{F^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n$.*

2 Intégration complexe

2.1 Intégrale le long d'un chemin

Définition 17. Un chemin est une application $\gamma : [t_0, t_1] \mapsto \mathbb{C}$ qui est continue et de classe C^1 par morceaux. Il relie deux nombres complexes $z_0 = \gamma(t_0)$ et

$z_1 = \gamma(t_1)$. Si $z_0 = z_1$, on parle alors de lacet. On définit la longueur du chemin $\gamma : L(\gamma) = \int_{t_0}^{t_1} |\gamma'(t)|dt$

Définition 18. Soit γ un chemin. On pose par définition $\int_\gamma F(z)dz = \int_{t_0}^{t_1} F(\gamma(t))|\gamma'(t)|dt$

Exemple 19.
— Si $\gamma(t) = t$, $\int_\gamma F(z)dz = \int_{t_0}^{t_1} F(\gamma(t))dt$
— Si $\gamma(t) = Re^{it}$ avec $t_0 = 0$ et $t_1 = 2\pi$, $\int_\gamma \frac{dz}{z} = 2i\pi$

Proposition 20. *Soit $\gamma : [t_0, t_1] \mapsto \mathbb{C}$ un chemin et φ une fonction de classe $C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}$ qui envoit $[u_0, u_1]$ sur $[t_0, t_1]$. Alors en posant $\delta = \gamma \circ \varphi$ $\int_\gamma F(z)dz = \int_\delta F(z)dz$*

Proposition 21. *Soit γ un chemin et φ une fonction complexe continue sur le support de γ. Alors la fonction $F : z \mapsto \int_\gamma \frac{\varphi(u)du}{u-z}$ est analytique (et donc holomorphe) sur Ω privé du support de γ. On a de plus pour tout z dans Ω privé du support de γ : $F^{(n)}(z) = n! \int_\gamma \frac{\varphi(u)du}{(u-z)^{n+1}}$*

2.2 Primitive des fonctions complexes

Définition 22. Soit f une fonction complexe de Ω dans C. On appelle F primitive de f dans Ω si F est holomorphe et F'=f.

Exemple 23. Soit $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R. Alors la série entière $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} z^{n+1}$ en est une primitive. En conséquence, toute fonction analytique admet localement des primitives.

Proposition 24 (Généralisation du TFCI). *Soit f une fonction continue sur Ω et F une primitive de f. Soit γ un chemin de z_0 à z_1. Alors $\int_\gamma f(z)dz = F(z_1) - F(z_0)$.*

Corollaire 25. *Soit γ un chemin fermé (lacet). Si la fonction f continue sur Ω admet une primitive F sur Ω, alors $\int_\gamma f(z)dz = 0$. C'est une condition nécéssaire d'existence de primitives.*

Application 26. *La fonction $z \mapsto \frac{1}{z}$ n'admet pas de primitive dans $\mathbb{C}^*$.*

Définition 27. Un ouvert Ω est dit étoilé si il existe $z_0 \in \Omega$ tel que pour tout z dans Ω, on a : $[z_0, z] \subset \Omega$.

Proposition 28. *Soit f une fonction complexe continue sur Ω étoilé. Si on a $\int_\theta f(z)dz = 0$ pour tout θ circuit triangulaire dans Ω, alors f admet des primitives sur Ω.*

Définition 29. Soit λ un lacet. On appelle indice de λ par rapport à $a \in \mathbb{C}$ le nombre n(λ,a)=$\frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{dz}{z-a}$

Proposition 30. *On note Ω le complémentaire du support de λ un lacet. Alors :*
— *$n(\lambda, a)$ est constant quand a est dans un domaine inclus dans Ω.*
— *$n(\lambda, a)$ est constant sur tout chemin qui ne rencontre pas λ*
— *$n(\lambda, a)$ tend vers 0 quand $|a|$ tend vers plus l'infini.*
— *$n(\lambda, a) \in \mathbb{Z}$*

Exemple 31. Méthode pour calculer l'indice avec des DESSINS.

2.3 Formule de Cauchy et conséquences

Théorème 32 (Goursat). *Toute fonction holomorphe dans un ouvert étoilé y admet des primitives.*

Théorème 33 (Formule de Cauchy). *Soit D le disque de centre z_0 et de rayon R éventuellement infini. On définit le lacet suivant, pour $0 < r < R$: $\gamma_r(t) = z_0 + re^{it}$, pour $t \in [0, 2\pi]$. Soit F une fonction holomorphe sur D, alors pour tout $a \in D(z_0, r)$, $F(a) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_r} \frac{F(z)dz}{z-a}$*

Corollaire 34. *Avec les mêmes notations, $F^{(n)}(a) = \frac{n!}{2i\pi} \int_{\gamma_r} \frac{F(z)dz}{(z-a)^{n+1}}$*

Application 35. *Propriété de la moyenne. Soit F une fonction holomorphe sur Ω ouvert. Soit z_0 dans Ω et $r > 0$ tel que $D(z_0, r) \subset \Omega$. Alors on a $F(z_0) = \frac{1}{2i\pi} \int_0^{2\pi} F(z_0 + re^{it})$*

Théorème 36. *Toute fonction holomorphe dans un ouvert Ω est analytique dans Ω.*

Corollaire 37. *La dérivée d'une fonction holomorphe est holomorphe.*

Théorème 38. *Soit F une fonction holomorphe sur un ouvert Ω, $a \in \Omega$ et r¿0 tel que $D(a, r) \subset \Omega$. On sait que F coincide avec la série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n$ avec $a_n = \frac{F^{(n)}(a)}{n!}$. Alors on a $a_n = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_r} \frac{F(z)dz}{(z-a)^{n+1}}$. On a aussi l'égalité : $a_n r^n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} F(a + re^{it})e^{-int}dt$*

Corollaire 39 (Inégalités de Cauchy). *Avec les mêmes notations, $|a_n| \leq \frac{M(r)}{r^n}$*

Application 40 (Théorème de Liouville)**.** *Toute fonction entière bornée est constante.*

Application 41 (Théorème de d'Alembert-Gauss)**.** *Tout polynôme de degré supérieur ou égal à 1 dans $\mathbb{C}[X]$ admet une racine.*

3 Zéros d'une fonction holomorphe

Proposition 42. *Soit z_0 le zéro d'une fonction holomorphe F. Alors on a : F(z)=0 pour tous les points z dans un voisinage de z_0 $\iff$ pour tout k plus grand que 0, $F^{(k)}(z_0) = 0$.*

On appelle zéro isolé de F un zéro qui ne vérifie pas l'une de ces deux conditions.

Proposition 43. *Soit z_0 un zéro isolé de F holomorphe sur Ω. Alors il existe un unique entier positif p et une fonction F_1 holomorphe telle que : $F(z) = (z-z_0)^p F_1(z)$ avec $F_1(z_0) = 0$. p est appellé l'ordre de multiplicité du zéro z_0.*

Théorème 44 (Principe des zéros isolés). *Si z_0 est un zéro isolé de F holomorphe, il existe un voisinage de z_0 dans lequel F ne possède pas d'autres zéros autres que z_0.*

Corollaire 45. *Toute fonction holomorphe dans un domaine Ω qui possède un zéro non-isolé est nulle sur Ω.*

Théorème 46 (Principe de prolongement analytique). *Soit f et g deux fonctions holomorphes sur Ω. Si f et g coincide sur un ensemble possédant un point d'accumulation, alors f=g sur tout Ω.*

Application 47. *Les fonctions exponentielle, circulaires et hyperboliques complexes sont les seules fonctions entières qui prolongent les fonctions réelles correspondantes.*

Application 48. *On peut ainsi redémontrer l'identité fonctionnelle de l'exponentielle complexe.*

Application 49 (Base hilbertienne des polynômes orthogonaux)**.** *On suppose qu'il existe α positif tel que*

$$\int_I e^{\alpha|x|}\rho d\lambda$$

soit finie. Alors la famille des polynômes orthogonaux associées à ρ est une base hilbertienne de $L^2(I,\rho)$.

Exemple 50. Si $I =]0, +\inf[$, $\rho(x) = x^{-ln(x)}$. En considérant la fonction $f(x) = sin(2\pi ln(x))$, on montre que la famille des polynômes orthogonaux associée à ρ n'est pas une base hilbertienne.

Théorème 51 (Principe du maximum).

— *Soit F une fonction holomorphe sur Ω. Si $|F|$ admet un maximum local en un point a, alors F est constante dans un voisinage de a.*

— *Soit F une fonction holomorphe sur Ω. Si $|F|$ admet un maximum local en un point a, alors F est constante sur Ω.*

Application 52. *On peut donner une seconde démonstration du théorème de d'Alembert-Gauss.*

4 Méromorphie et points singuliers

Définition 53. Soit F une fonction holomorphe en tout point d'un ouvert Ω, sauf en $a_0 \in \Omega$.

— Soit F est bornée au voisinage de a_0, on parle alors de fausse singularité. La fonction F admet alors un prolongement holomorphe en a_0.

— Soit F n'est pas bornée au voisinage de a_0 et $\lim_{z\mapsto a_0} |F(z)| = +\infty$. On dit que a_0 est un pôle de F

— Soit F n'est pas bornée au voisinage de a_0 et on n'a pas de limite en a_0, on parle alors de point singulier essentiel.

Exemple 54. — La fonction $z \mapsto \frac{\sin(z)}{z}$ est holomorphe sur $\mathbb{C}^*$ et admet une fausse singularité en 0.

— La fonction $z \mapsto \frac{1}{1+z^2}$ est holomorphe sur $\mathbb{C}/\{i,-i\}$ et i et -i sont des pôles de F.

— La fonction $z \mapsto sin(\frac{1}{z})$ est holomorphe sur $\mathbb{C}^*$

Définition 55. Soit F une fonction holomorphe dans un voisinage strict de a_0. Il existe dans un $r > 0$ tel que F soit holomorphe sur le disque pointé de centre a_0 et de rayon r. Par application de la formule de Cauchy avec le lacet $\gamma_{rho} : t \mapsto a_0 + re^{it}$ (pour tout $0 < \rho < r$, on trouve que $\frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_\rho} F(z)dz$ est indépendante de ρ. Cette constante s'appelle résidu de F en a_0, noté Res(F,a_0).

Exemple 56. Pour la fonction $z \mapsto \frac{1}{1+z^2}$, le résidu en i vaut $\frac{-i}{2}$.

Proposition 57. *Le résuidu en une fausse singularité est nulle.*

Proposition 58. *Soit F une fonction holomorphe sur Ω qui admet un pôle en a. Alors F se met sous la forme $F(z) = \frac{F_1(z)}{(z-a^m)}$ où m est un entier naturel positif appelé ordre du pôle et F_1 est une fonction holomorphe qui ne s'annule pas en a. En développant en série entière F_1 sur un disque $D(a,r)$ proche de a_0, on aboutit à l'expresion sur ce disque : $F(z) = \frac{a_0}{(z-a)^m} + \frac{a_1}{(z-a)^{m-1}} + ... + \frac{a_{m-1}}{z-a} + F_2(z)$ avec F_2 holomorphe sur $D(a,r)$ et $a_0 \neq 0$. La partie fractionnelle est appelé partie régulière de F.*

Corollaire 59. *On reprend les notations de la question ci-dessus.*

— $Res(F,a) = a_{m-1}$

— $Res(F,a) = lim_{z\mapsto a}(z-a)F(z)$ *dans le cas d'un pôle simple*

— $Res(F,a) = \frac{1}{(m-1)!} lim_{z\mapsto a} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}[(z-a)^m F(z)]$

Exemple 60. — Résidu de $z \mapsto \frac{e^z}{z^2+1}$ en i et -i.

— Résidu de $z \mapsto \frac{2z+3}{(z-1)^3 e^z}$ en 1.

Théorème 61 (Théorème des résidus). *Soit F une fonction holomorphe dans un ouvert étoilé Ω, sauf aux points d'un ensemble S de singularités isolées. Soit λ un tracé ne rencontrant pas S sur Ω. Alors on à $\frac{1}{2i\pi}\int_{lambda} F(z)dz = \sum_{z\in S} n(\lambda,z)Res(F,z)$*

Exemple 62. Exemple de calcul de primitives à l'aide du théorème des résidus.