239 – Fonctions définies par une intégrale dépendant d'un paramètre. Exemples et applications.

Remarque 1. Soit $f \in C^0([a,b])$, alors l'application $t \mapsto F(t) = \int_a^t f(x)dx$ est une primitive de f.

1 Intégrale dépendant d'un paramètre

Cadre : Soit (Ω, A, μ) un espace probabilisé et soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. On considère l'application

$$\begin{aligned} F : I &\longrightarrow F \\ x &\longmapsto \int_\Omega f(t,x)d\mu(x) \end{aligned}$$

où $f : \Omega \to \mathbb{C}$.

1.1 Les théorèmes de continuité et dérivabilité

Théorème 2 (Théorème de convergence dominée). *Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions mesurables $\Omega \to \mathbb{C}$. On suppose que f_n tend presque partout vers f mesurable, et qu'il existe g intégrable positive sur Ω tel que, $\forall n \in \mathbb{N}$, μ-pp x, $|f(t)| \leq g(t)$. Alors $||f_n - f||_1 n \underset{\rightarrow}{\rightarrow} +\infty$*

Théorème 3 (Continuité sous le signe intégrale). *On suppose que :*

- *Pour tout $t \in I$, f est mesurable sur Ω*
- *Pour presque tout $x \in Omega$, $t \mapsto f(t,x)$ est continue sur I*
- *Il existe g intégrable positive, telle que, pour tout t, pour presque-tout x, $|f(x,t)| \leq g(x)$*

Alors, $F \in C^0(I)$

Théorème 4 (Dérivabilité sous le signe intégrale). *On suppose que :*

- *Pour tout $t \in I$, f est mesurable sur Ω*
- *Pour presque tout $x \in Omega$, $t \mapsto f(t,x)$ est dérivable sur I*
- *Il existe g intégrable positive, telle que, pour tout t, pour presque-tout x, $|\frac{\partial}{\partial t} f(x,t)| \leq g(x)$*

Alors, $F \in C^1(I)$, et sa dérivée est $F'(t) = \displaystyle\int_\Omega \frac{\partial}{\partial t} f(x,t)d\mu(x)$

Remarque 5. La domination n'a pas besoin d'être global, il suffit de la montrer pour tout t dans un voisinage de t, car la dérivabilité et la continuité sont des notions locales.

Application 6 (Calcul de l'intégrale du sinus cardinal). $\displaystyle\int_0^\infty \frac{sin(x)}{x}dx = \frac{\pi}{2}$

Application 7 (Equation de la chaleur sur le cercle). *Soit u_0 non-nulle $\in C^0_{2\pi}$, de classe C^1 par morceaux. On cherche $u : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ tel que :*

- *$\forall t \in \mathbb{R}^+$, $x \mapsto u(t,x)$ est 2π-périodique*
- *$u \in C^0(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R})$*
- *$u \in C^\infty(\mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R})$*

et qui vérifie $\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(t,x) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x) & \forall (t,x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \\ u(0,x) = u_0(x) & \forall x \in \mathbb{R} \end{cases}$

Alors une telle solution est unique et est donnée par

$u(t,x) = \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{-n^2 t} e^{inx}$ *où les c_n sont les coefficients de Fourier de u_0*

Application 8. *Soit $F : \lambda \mapsto \displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin(\lambda x)}{x(x^2+1)}dx$, définie sur $\mathbb{R}$. Alors F est dérivable et $F'(\lambda) = \frac{\pi}{2}e^{-|\lambda|}$.*

Application 9. *Soit X une variable aléatoire qui admet un moment d'ordre n sur un espace probabilisé. Alors la fonctions caractéristique de X, $\mathbb{E}(e^{itX}) = \phi(t)$ est de classe C^n.*

Application 10. *On définit pour tout $t > 0$, $\Gamma(t) = \displaystyle\int_0^\infty x^{t-1}e^{-x}dx$. La fonction Γ a bien un sens, et elle est C^∞ sur $]0, +\infty[$, et pour tout $t > 0$, $\Gamma(t+1) = t\Gamma(t)$, et $\Gamma(n+1) = n!$.*

1.2 Holomorphie sous le signe intégral

Théorème 11 (Holomorphie sous le signe intégrale). *Soit Λ un ouvert de $\mathbb{C}$ et $f(z,x)$ une fonction de deux variables définies sur $\Lambda \times \Omega$ On suppose que :*

- *Pour tout $z \in \Lambda$, $x \mapsto f(z,x)$ est mesurable sur Ω*
- *pour presque tout x, $z \mapsto f(z,x)$ est holomorphe sur Λ.*
- *Pour tout compact $K \subset \Lambda$, il existe g_K intégrable positive telle que pour tout $z \in K$ pour presque tout $x \in Omega$, $|f(z,x)|$ est holomorphe sur Λ.*

Alors, $F : z \mapsto \int_\Omega f(z,x)d\mu(x)$ est holomorphe sur Λ

Application 12. *La fonction Γ se prolonge en une fonction holomorphe dans le demi-plan des complexes à partie réelle positives avec* $\Gamma(t) = \int_0^{\infty} e^{(z-1)ln(x)}e^{-x}dx$

Application 13. *Le théorème d'holomorphie sous le signe intégrale est aussi utilisé pour démontrer que les polynômes orthogonaux, sous de bonnes hypothèses, forment une base de Hilbert des espaces L^2 à poids.*

2 Convolution

2.1 Régularité

Définition 14. Pour f et g deux fonctions boréliennes de $\mathbb{R}$,Si la quantité est bien définie, on pose le produit de convolution de f et g : $f \star g(x) = \int_{\mathbb{R}} f(t)g(x-t)dt$. Le produit de convolution commute.

Théorème 15.

- *Si f est dans $L^p(\mathbb{R}, B(\mathbb{R}, \mu))$ et g dans $L^1(\mathbb{R}, B(\mathbb{R}, \mu)$,alors le produit de convolution est bien définie PRESQUE-partout et il appartient à $L^p(\mathbb{R}, B(\mathbb{R}, \mu))$ et $||f \star g||_p \leq ||f||_1||g||_p$ (dans Lp et L1 respectivement)*
- *Si f est dans $L^p(\mathbb{R}, B(\mathbb{R}, \mu))$ et g dans $L^q(\mathbb{R}, B(\mathbb{R}, \mu))$ (q l'exposant conjugué de $p \in [1, +\infty[$), alors le produit de convolution est bien définie partout et il est bilinéaire, et $||f \star g||_\infty \leq ||f||_p||g||_q$*

2.2 Approximation

Définition 16. Une suite $(\alpha_n)_n$ de fonctions intégrables positives sur $\mathbb{R}$ est appelée approximation de l'unité si :

- Pour tout n, α_n est d'intégrale 1
- Pour tout $\delta > 0$, $\int_{|x|>\delta} \alpha_n(x)dx$ tend vers 0 quand $n \to +\infty$.

Exemple 17. Soit α une fonction intégrable positive d'intégrale 1, on définit les α_n par $\alpha_n(x) = n\alpha(nx)$.

Théorème 18. *Si f est dans $L^p(\mathbb{R}^d, B(\mathbb{R}^d, \mu))$ et $(\alpha_n)_n$ une approximation de l'unité, alors le produit de convolution de f et α_n est dans $L^p(\mathbb{R}^d, B(\mathbb{R}^d, \mu))$ et il converge dans $L^p(\mathbb{R}^d, B(\mathbb{R}^d, \mu))$ vers f.*

Théorème 19. *Si f est continue à support compact de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ et $(\alpha_n)_n$ une approximation de l'unité, alors le produit de convolution de f et α_n est bien définie sur $\mathbb{R}$ et il converge uniformément vers f.*

Application 20. *On peut démontrer le Théorème de Weierstrass et de Fejer à l'aide d'approximation de l'unité.*

Théorème 21. *Soit $f \in L^p(\mathbb{R})$, et g une fonction de classe C^k à support compact. Alors $f \star g$ est bien définie sur $\mathbb{R}$ et est de classe C^k*

Corollaire 22. *Les fonctions C^∞ à support compact sont denses dans $L^p(\mathbb{R})$*

3 Transformée de Fourier

Définition 23. On définit la transformée de Fourier de $f \in L^1(\mathbb{R})$ par $\hat{f}(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{-itx}f(x)dx$

Théorème 24 (Lemme de Riemann-Lebesgue). *Si $f \in L^1(\mathbb{R})$, $\hat{f}$ est une fonction continue de $\mathbb{R}$ qui tend vers 0 à l'infini.*

Définition 25. On introduit l'espace $S(\mathbb{R})$ de Schwartz des fonctions C^∞ à décroissance rapide : $S(\mathbb{R}) = \{f \in C^\infty(\mathbb{R}) \mid \forall(p,q) \in \mathbb{N}, \exists C_{p,q} > 0 : \ |x^p f^{(q)}(x)| \leq C_{p,q}, \forall x \in \mathbb{R}\}$

Exemple 26. $x \mapsto e^{-x^2}$ est dans $S(\mathbb{R})$.

Théorème 27. *$S(\mathbb{R})$ est stable par transformée de Fourier.*

Exemple 28. La transformée de Fourier de $x \mapsto e^{-x^2}$ est $t \mapsto \sqrt{\pi}e^{-\frac{t^2}{4}}$.

Théorème 29 (Formule d'inversion de fourier dans Schwartz). *Soit $f \in S(\mathbb{R})$, alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$,* $f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} e^{itx}\hat{f}(t)dt$

Corollaire 30. *Si $f, g \in S(\mathbb{R})$, alors* $\int_{\mathbb{R}} f(x)\hat{g}(x)dx = \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(t)g(t)dt$

Remarque 31. Grâce à ce théorème, on est capable d'étendre la transformée de Fourier de $S(\mathbb{R})$ à $L^2(\mathbb{R})$, (en effet, les fonctions C^∞ à support compact sont denses dans $S(\mathbb{R})$, et $S(\mathbb{R}) \subset L^2(\mathbb{R})$