233 – Analyse numérique matricielle : résolution approchée de systèmes linéaires, recherche de vecteurs propres, exemples.

1 Outils théoriques

1.1 Normes matriciels

Définition 1. Si $||x||$ désigne une norme sur $x \in \mathbb{C}^n$, alors pour $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$, $|||A||| = sup_{x \in \mathbb{C}^n} \frac{||Ax||}{||x||}$ est une norme sur $\mathbb{M}_n(\mathbb{C})$, Il s'agit d'une norme subordonnée à la norme vectorielle $||.||$. Cette norme vérifie $|||AB||| \leq |||A||||||B|||$ (Elle est dit matricielle).

Exemple 2. Exemple de norme matricielle sur $\mathbb{M}_n(\mathbb{C})$

— Frobenius $||A||_F = (\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}|^2)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{tr({}^tAA)}$

— Norme l^q, $||A||_q = (\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}|^q)^{\frac{1}{q}}$

Il existe des normes sur $\mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ non-matricielle : Norme l^∞, $||A|| = \max_{1 \leq i,j \leq n} |a_{i,j}|$.

1.2 Autour du rayon spectral

Définition 3. On définit le rayon spectral d'une matrice $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$:$\rho(A)$ comme étant la plus grande valeur propre en valeur absolue de A.

Proposition 4. *Soit $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$, normale. Alors $||A||_2 = \rho(A)$*

Théorème 5. *Soit A une matrice complexe de taille n. On a les 3 propriétés suivantes :*

— *1. Pour toute norme matricielle, on à $\rho(A) \leq ||A||$*

— *2. Pour tout positif, il existe une norme subordonnée à une norme vectoriel telle que : $||A|| \leq \rho(A) + \varepsilon$*

Théorème 6. *Soit A matrice complexe de taille n. On a équivalence entre les propriétés suivantes :*

— *1. $\lim_{k \longleftarrow \infty} A^k$*

— *2. Pour toute valeur initiale x_0, la suite définie par $x_{k+1} = Ax_k$ converge vers 0*

— *3. $\rho(A) < 1$*

— *4. Il existe au moins une norme matricielle indutie par une norme vectorielle telle que $||A|| < 1$*

— *5. La matrice $I_n - A$ est inversible d'inverse $\sum_{i=1}^{\infty} A^i$*

1.3 Autour du conditionnement

Définition 7. Conditionnement d'une matrice $K(A) = ||A||||A^-1||$ (dépend de la norme !)

Exemple 8. Lien du conditionnement avec l'erreur du système $Ax = b$ pour des petites pertubations de A et b. (Voir le Ciarlet Optimisation).

Proposition 9. *Soit $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ normale. Alors : $K(A) = \frac{\lambda_{max}}{\lambda_{min}}$*

2 Résolution de système linéaire

2.1 Méthodes directes

Proposition 10. *On considère le système linéaire $Ax = b$ avec $A \in \mathbb{M}_{n,p}(\mathbb{C})$ et $b \in \mathbb{C}^n$.*

— *Si $m = n$ et si A est inversible, ce système admet une unique solution. Si A n'est pas inversible, alors soit $b \in Im(A)$ et on a une infinité de solution qui diffèrent d'un élément de $\ker(A)$, sinon, il n'y a pas de solution.*

— *$m \neq n$, il existe une solution $\iff$ $b \in Im(A)$. La solution est unique $\iff$ $\ker(A) = 0$, et deux solutions distinctes diffèrent d'un élément de $\ker(A)$.*

.

Théorème 11 (Formules de Cramer). *Si on note $A_1, ..., A_n$ les vecteurs colonnes de $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$, alors si $det(A) \neq 0$, on à une expression de la solution x du système linéaire : $x_i = \dfrac{det(A_1, ..., A_{i-1}, B, A_{i+1}, ..., A_n}{det(A)}$.*
Cette méthode est numériquement très innéficace.

Exemple 12. Le système $Ax = b$ avec $A = \begin{matrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}$ est facile à résoudre par remontée car A est triangulaire.

Théorème 13 **(Pivot de Gauss).** *La méthode d'élimination de Gauss permet de se rammener à un système triangulaire équivalent. Soit $A \in \mathbb{M}_{n,p}(\mathbb{C})$ de rang r, alors A est équivalente à $\begin{matrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix}$ Cela se fait en $O(^3)$ opérations.*

Exemple 14. On applique la méthode du pivot à un système simple 4×4

Théorème 15 **(Décomposition LU).** *Soit $A \in \mathbb{M}_{n,n}(\mathbb{C})$ dont tout les mineurs sont positifs, alors il existe un couple (L, U) avec L triangulaire inférieure à diagonale unité et U triangulaire supérieure tel que $A = LU$.*

Remarque 16. L'intérêt de cet algorithme est que l'on stocker (L, U) pour inverser facilement la matrice A. Il agit en $O(n^3)$. On peut l'appliquer au matrice symétrique définie positive comme le montre le théorème suivant :

Théorème 17. *Soit $A \in \mathbb{M}_{n,n}(\mathbb{C})$, alors A est symétrique définie positive $\iff$ tout ses mineurs sont strictement positifs.*

Théorème 18 **(Problème des moindres carrés).** *On s'intéresse au problème suivant $\min_{x \in \mathbb{R}^p} ||Ax - b||_2$, avec $A \in \mathbb{M}_{n,p}(\mathbb{C})$ et $b \in \mathbb{C}^n$. On cherche ainsi une solution du système linéaire au sens quadratique ! Cela est particulièrement utile pour les systèmes qui n'admettent pas de solution.*

- *Le problème des moindres carrés admet toujours une solution x, et celle-ci vérifie l'équation normale : ${}^tAA =^* Ab$, avec ${}^tAA \in S_n(\mathbb{R})$. Deux solutions distinctes diffèrent d'un élément de $\ker(A)$.*
- ***[Methode de Choleskly]** On s'intéresse à la résolution de $Sx = d$ avec S matrice symétrique de taille n. Il existe une unique matrice réelle B triangulaire inférieure à éléments diagonaux positifs tel que $S = B^tB$*
- ***[Methode de factorisation QR]** On suppose que n=p. On applique la méthode de factorisation QR et on trouve une solution explicite du problème des moindres carrés.*

Remarque 19. Le problème de la régréssion linéaire est un problème de moindres carrés. Faire un dessin en annexe.

2.2 Méthodes itératives

Définition 20.
- On s'intéresse à la résolution du système linéaire $Ax = b$. On appelle décomposition régulière de A tout couple de matrice (M,N) avec M inversible tel que $A = M - N$.
- La méthode itérative lié à cette décomposition est : $x_0 \in \mathbb{R}^n$ et $Mx_{k+1} = Nx_k + b$.
- La méthode est dite convergente si $\forall x_0 \in \mathbb{R}^n$, la suite x_k converge vers une limite x. Dans ce cas, cette limite est alors solution du système $Ax = b$. La méthode est convergente si, $\forall x_0 \in \mathbb{R}^n$, $r_k = b - Ax_k$ converge vers 0 (ou $e_k = x - x_k$ converge vers 0).

Théorème 21. *Une méthode itérative est convergente $\iff$ $\rho(M^{-1}N) < 1$.*

Théorème 22 **(Méthodes itératives usuelles).**
- *Méthode du gradient à pas fixe : $M = \frac{I}{\alpha}$ et $N = \frac{I}{\alpha} - A$. On a donc $x_{k+1} = x_k + \alpha(b - Ax_k)$.*
- *Méthode de Jacobi : $M = D$ la diagonale de A et $N = D - A$.*
- *Méthode de Gauss-Seidel : $M = D - E$ et $N = F$ où -E est la partie inférieure stricte triangulaire de A, -F la partie supérieure stricte triangulaire.*

Lemme 23 **(Inégalité de Kantorovitch).** *Soit $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$, alors $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $< Ax|x >< A^{-1}x|x > \leq \frac{1}{4}\frac{(\lambda_{max} + \lambda_{min})^2}{\lambda_{max}\lambda_{min}}$*

Théorème 24 **(Algorithme du gradient à pas optimal).** *Objectif : On veut résoudre le système linéaire de taille n : $Ax = b$, avec $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$.*

- *Ce système admet un unique minimum x^*. x est solution de ce système $\iff$ x^* est l'unique minimum de la fonctionnelle $\Phi \begin{matrix} \mathbb{R}^n \to & \mathbb{R} \\ x \mapsto & \frac{1}{2} < Ax|x > - < b|x > \end{matrix}$*
- *L'algorithme suivant : $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $r_0 = Ax_0 - b$, puis $x_{n+1} = x_n + \alpha_k r_k$, $r_{k+1} = r_k - A\alpha_k r_k$, $\alpha_k = \frac{||r_k[||^2}{< Ar_k|r_k >}$ fournit une suite $(x_k)_k$ qui vérifie : $||x_k - x^*|| \leq C(\frac{\lambda_{min} - \lambda_{max}}{\lambda_{min} + \lambda_{max}})^k$, et qui converge donc bien vers x^*.*

3 Recherche de valeurs propres

Lemme 25 **(Hadamard).** *Si M est une matrice à coefficient complexe à diagonale dominante, alors M est inversible.*

Définition 26. Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$. Le ième disque de Gerschgorin est le disque fermé de centre $a_{i,i}$ et de rayon $r_i = \sum_{j=1, j \neq i}^{n} |a_{i,j}|$.

Théorème 27. *Les valeurs propres d'une matrice complexe sont situés dans la réunion des disques de Gerschgorin.*

Théorème 28 (Méthode de la puissance). *Objectif : trouver la plus grande valeur propre en valeur absolue de A :* $|\lambda_1| \leq ... \leq |\lambda_n|$ *L'algorithme est le suivant :* $x_0 \in \mathbb{R}^n$*, avec* $||x_0 = 1$ *puis* $y_k = Ax_{k+1}$ *et* $x_k = \frac{y_k}{||y_k||}$.
Si A est diagonalisable à valeurs propres réelles, avec $B = (e_1, ...e_n)$ *une base de vecteur propre, si la valeur propre* λ_n *est simple et positive, et si le coefficient devant* e_n *dans la décomposition dans la base B de* x_0 *est non-nul, alors la méthode converge :* $x_k \underset{k \to +\infty}{\to} \pm e_n$ *et* $||y_k|| \underset{k \to +\infty}{\to} |\lambda_n|$

Remarque 29. En appliquant la méthode à la matrice A^{-1}, on est capable de trouver la plus petite valeur propre en valeur absolue.
Remarque 30. Les valeurs propres d'une matrice compagnon associé à un polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ sont exactement ses racines. On peut donc appliquer l'algorithme ci-dessus pour trouver la plus grande racine de P en valeur absolue.