228 – Continuité et dérivabilité des fonctions réelles d'une variable réelle. Exemples et applications.

1 Continuité et dérivabilité des fonctions à variables et à valeurs réels

1.1 Définition de la continuité

Définition 1. Une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est dite continue en $a \in I$ si f admet une limite finie quand x tend vers a.
Elle est dit continue sur I si elle est continue en tout point de I.

Exemple 2. La fonctions $x \mapsto \mathbb{1}_{\mathbb{Q}}$ n'est pas continue sur $\mathbb{R}$.

Théorème 3. *f est continue en $a \iff$ pour toute suite $(x_n)_n$ de réels qui tend vers a, on à $f(x_n) \underset{n\to+\infty}{\to} f(a)$.*

Remarque 4. La somme, le produit, la composition et l'inverse (avec les bonnes hypothèses), de deux fonctions continues fournit une application continue.

Application 5. *Soit $(u_n)_n$ définie par $u_0 \in I$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ avec $f : I \to \mathbb{R}$. Alors si la suite $(u_n)_n$ converge, sa limite est une point fixe de f.*

Théorème 6 (Prolongement par continuité). *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur I. Si f admet une limite finie α quand x tend vers a bord de I, alors l'application $\bar{f} : I \bigcup\{a\} \to \mathbb{R}$ qui vaut α en a et f sur I est une application continue.*

Exemple 7. L'application $x \mapsto \dfrac{sin(x)}{x}$ est prolongeable en 0 par continuité.

1.2 Continuité sur un compact

Proposition 8. *Une fonction continue sur un segment $[a, b]$ est bornée et atteint ses bornes.*

Contre-Exemple 9. L'hypothèse de segment est fondamentale :
$x \mapsto \dfrac{1}{t}$ est continue sur $]0, 1]$ mais n'atteint pas ses bornes.
$x \mapsto t$ sur $[0, 1[$ est continue bornée mais n'atteint pas sa borne supérieure
$x \mapsto \dfrac{1}{1+t^2}$ est continue,bornée sur $\mathbb{R}$, mais n'atteint pas sa borne inférieure 0.

Définition 10. Une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est dite uniformément continue sur I si $\forall\varepsilon > 0$, $\exists\alpha > 0$ tel que $\forall(x, y) \in I^2$, $(|x - y| < \alpha) \implies (|f(x) - f(y)| < \varepsilon)$

Exemple 11. La fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ n'est pas uniformément continue sur $]0, 1]$, mais elle est continue.

Théorème 12 (Heine). *Une application continue sur un compact est uniformément continue.*

Application 13. *Une fonction continue et périodique sur $\mathbb{R}$ est uniformément continue*

1.3 Dérivabilité

Définition 14. Soit $f : I \to \mathbb{R}$. f est dite dérivable en a si la quantité $\dfrac{f(t) - f(a)}{(t - a)}$ admet une limite finie l quand $t \to a$. On note $f'(a) = l$.
f est dite dérivable sur I sur elle l'est en tout point de I. Dans ce cas, on définit l'application dérivée $f' : I \to \mathbb{R}$.
Faire un dessin en **ANNEXE** qui permet d'interpréter la dérivée de f en a comme la pente de f en a.

Remarque 15. Si f est dérivable sur I et sa dérivée est continue sur I, elle est dit de classe C^1. On définit par reccurence la classe C^n.

Contre-Exemple 16. La fonction $x \mapsto |x|$ n'est pas dérivable en 0. (Elle est dérivable à droite et à gauche).

Proposition 17. *Si f est dérivable en a, alors f est continue en a*

Exemple 18. La fonction dérivée n'est pas forcément continue : $x \mapsto x^2 \sin(\dfrac{1}{x})$

Théorème 19. *Soit f, g deux applications de $I \to \mathbb{R}$, dérivables en a. Alors :*
- *$(f + \lambda g)$ est dérivable en a, et $(f + \lambda g)'(a) = f'(a) + \lambda g'(a)$*
- *(fg) est dérivable en a, et $(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$*
- *si $g(a) \neq 0$, $(\dfrac{f}{g})$ est dérivable en a, et $(\dfrac{f}{g})'(a) = \dfrac{f'(a)g(a) + f(a)g'(a)}{g'(a)^2}$*

Théorème 20 (Règle de Leibniz). *Si $f^{(n)}(a)$ et si $g^{(n)}(a)$ existent, alors $(fg)^{(n)}(a)$ existe et $(fg)^{(n)}(a) = \sum_{k=0}^{n} f^{(k)}(a)g^{(n-k)}(a)$*

Théorème 21. *On donne la dérivée d'une composée de deux fonctions*

Théorème 22. *Soit f une bijection de I dans J dérivable en a. Si $f'(a) \neq 0$, alors f^{-1} est dérivable en $b = f(a)$ et $f^{-1\prime}(b) = \frac{1}{f'(f(a))}$*

Exemple 23. On donne en **ANNEXE** un tableau donnant plusieurs dérivées usuelles.

2 Des théorèmes classiques

2.1 Le théorème des valeurs intermédiaires

Théorème 24. *Soit f une fonction continue sur de I intervalle de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Alors $f(I)$ est un intervalle de $\mathbb{R}$.*

Corollaire 25. *Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est continue et telle que $f(a) < 0$ et $f(b) > 0$, alors il existe $c \in]a,b[$ tel que $f(c) = 0$*

Exemple 26. Le réel c n'est pas unique : $x \mapsto x^3 - x$ sur $[-2, 2]$.

Application 27 (Formule de la moyenne). *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue et $f : [a,b] \to \mathbb{R}^+$ continue par morceaux et positives. Alors il existe $c \in [a,b]$ tel que $\int_a^b f(t)g(t)dt = f(c)\int_a^b g(t)dt$*

Théorème 28. *Théorème de la bijection monotone.*

Application 29. *Théorème de Darboux.*

2.2 Théorème de Roll et ses conséquences

Proposition 30. *Si $f : I \to \mathbb{R}$ admet un extrema relatif en c à l'intérieur de I et si f est dérivable en c, alors $f'(c) = 0$.*

Théorème 31 (Roll). *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une application déribable sur $]a,b[$ et continue sur $[a,b]$, telle que $f(a) = f(b)$. Alors il existe $c \in]a,b[$ tel que $f'(c) = 0$. On fait un dessin en **ANNEXE**.*

Contre-Exemple 32. $x \mapsto x$ sur [0,1]. La réciproque est fausse : $x \mapsto x^3 n$

Théorème 33 (Théorème des accroissements finies). *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une application déribable sur $]a,b[$ et continue sur $[a,b]$. Alors il existe $c \in]a,b[$ tel que $f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$. On fait un dessin en **ANNEXE**.*

Application 34 (Inégalité des accroisssements finies). *Soit f continue et dérivable sur $[a,b]$, tel que f' est bornée par M sur $[a,b]$. Alors $\forall (x,y) \in [a,b]$, $|f(x) - f(x)| \leq M|x - y|$.*

Corollaire 35. *Une fonction $f : [a,b] \mapsto \mathbb{R}$ continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$ est croissante sur $[a,b] \iff 0 \leq f'(x),\ \forall x \in]a,b[$.*

Corollaire 36. *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ continue sur I et dérivable sur $I/\{c\}$. Alors si f' admet une limite l en c, alors f est dérivable en c et $f'(c) = l$.*

2.3 Développements de Taylor

Théorème 37 (Théorème de Taylor-Lagrange). *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^n sur $[a,b]$, tel que $f^{(n+1)}$ existe sur $]a,b[$. Alors il existe $c \in]a,b[$ tel que $f(b) = \sum_{k=0}^{n} \dfrac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k + \dfrac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(b-a)^{n+1}$*

Théorème 38 (Formule de Taylor-Young). *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^n sur $[a,b]$, tel que $f^{(n+1)}$ existe sur $]a,b[$. Alors pour h proche de a on à : $f(a) = \sum_{k=0}^{n} \dfrac{f^{(k)}(a+h)}{k!}h^k + \dfrac{f^{(n+1)}(a)}{(n+1)!}h^{n+1} + o(h^{n+1})$.*

Théorème 39 (Méthode de Newton). *Soit $f : [c,d] \to \mathbb{R}$ de classe C^2. On suppose que $f(c) < 0 < f(d)$ et $f'(x) > 0$ sur $[c,d]$. On considère la suite définie par réccurence : $x_0 \in [c,d]$, $x_{n+1} = F(x_n)$ où $F : t \mapsto t - \dfrac{f(t)}{f'(t)}$. Alors :*

- *Faire un dessin en **ANNEXE**.*
- *f admet un unique zéro sur $[c,d]$. Il existe $\alpha > 0$ tel que $[a-\alpha, a+\alpha] = I$ soit F-stable et que $\forall x_0 \in [a-\alpha, a+\alpha] = I$, la suite $(x_n)_n$ converge quadratiquement vers a.*
- *Si de plus $f''(x) > 0$ sur $[c,d]$, alors le résultat précédent est valable pour $I = [a,d]$, et de plus $(x_n)_n$ est décroissante (ou constante) vers a et on à l'équivalent : $x_{n+1} - a \sim \dfrac{f''(a)}{2f'(a)}(x_n - a)^2$.*

Théorème 40 (Formule de Taylor-Young à reste intégrale). *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^{n+1} sur $[a,b]$. Alors $f(b) = \sum_{k=0}^{n} \dfrac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k + \int_a^b \dfrac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(b-t)^{n+1}dt$*

3 Suite de fonctions

Théorème 41. *Soit $(f_n)_n$ une suite de fonction continues de $I \to \mathbb{R}$. Si (f_n) converge uniformément vers une fonction f sur I, alors f est continue.*

Application 42 (Théorème de Dini).
- *Soit $(f_n)_n$ une suite croissante de fonctions réelles continues sur $[a,b]$ qui converge vers une fonction f continue sur $[a,b]$. Alors la convergence est uniforme.*
- *Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions réelles croissante sur $[a,b]$ qui converge vers une fonction f continue sur $[a,b]$. Alors la convergence est uniforme.*
- *On construit une suite de fonction qui tend uniformément vers $t \mapsto \sqrt{t}$ sur $[0,1]$.*

> **Théorème 43 (De Weierstrass).** *Toute fonction continue sur le segment $[a,b]$ est limite uniforme d'une suite de polynômes.*

Théorème 44. *Soit $(f_n)_n$ une suite de fonction de classe C^1 de $I = [a,b] \to \mathbb{R}$. On suppose qu'il existe une fonction f de $I \to \mathbb{R}$ telle que : il existe $x_0 \in I$ tel que $(f_n(x_0))_n$ converge et $(f_n')_n$ converge uniformément vers une fonction g sur $[a,b]$. Alors $(f_n)_n$ converge uniformément vers une fonction f de classe C^1 qui vérifie $f' = g$.*

4 Des fonctions particulières

4.1 Fonctions lipschitziennes

Définition 45. Une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est dite k-lipschitzienne si pour tout $(x,y) \in I^2$, $|f(x) - f(y)| \leq k|x-y|$.

Remarque 46. Une fonction k-lipschitzienne est uniformément continue.

Théorème 47 (théorème de Banach-Picard). *Soit $f : I \to E$ une application k-lipschitzienne avec $0 < k < 1$. Alors f admet un unique point fixe et toute suite définie par $u_0 \in E$ puis $u_{n+1} = f(u_n)$ converge vers ce point fixe.*

Exemple 48. La suite définie par $u_0 \in [0, +\infty[$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{12 + u_n}$ converge vers 4.

4.2 Fonctions convexes

Définition 49. Une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ (I intervalle de $\mathbb{R}$) est dite convexe si $\forall (x,y) \in I^2$, $\forall \lambda \in [0,1]$, $f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$.
Concrètement, cela signifie que f est au dessus de ses cordes.

Exemple 50. $x \mapsto x^2$ est convexe, $y \mapsto ln(y)$ est concave.

Proposition 51. *Une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ (I intervalle de $\mathbb{R}$) est convexe $\iff$ $\forall x_0 \in I$, $g_{x_0} : \begin{array}{ccc} I & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \end{array}$ est croissante.*

Corollaire 52. *Soit une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ (I intervalle de $\mathbb{R}$) convexe*
- *f possède en tout point de l'intérieur de I une dérivée à gauche et à droite.*
- *f est continue à l'intérieur de I*
- *Les applications f_d' et f_g' sont croissantes sur l'intérieur de I, et $f_g'(x) \leq f_d'(x)$.*

Théorème 53. *Soit une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ (I intervalle de $\mathbb{R}$) dérivable sur I. Alors :*
f est convexe $\iff$ f' est croissante sur I $\iff$

Proposition 54. *Soit une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ (I intervalle de $\mathbb{R}$) convexe. Alors $\forall (x_1, ..., x_n) \in I^n$, $\forall (\alpha_1, ..., \alpha_n) > 0$, on à $f(\dfrac{\alpha_1 x_1 + ... + \alpha_n x_n}{\alpha_1 + ... + \alpha_n}) \leq \dfrac{\alpha_1 f(x_1) + ... + \alpha_n f(x_n)}{\alpha_1 + ... + \alpha_n}$.*

Corollaire 55 (Inégalité arithmético-géométrique). *Soient $(x_1, ..., x_n)$ des nombres réels positifs. Alors $(x_1 ... x_n)^{\frac{1}{n}} \leq \dfrac{x_1 + ... + x_n}{n}$*

Application 56. *[Inégalité de Hölder] Soient deux nombres positifs p et q tel que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. Soient $(a_1, ..., a_n)$ et $(b_1, ..., b_n)$ des réels positifs. Alors : $\sum_{k=0}^{n} a_k b_k \leq (\sum_{k=0}^{n} a_k^p)^{\frac{1}{p}} (\sum_{k=0}^{n} b_k^q)^{\frac{1}{q}}$*

Application 57 (Inégalité de Minkowski).