226 : – Suites vectorielles et réelles définies par une relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$. Exemples. Applications à la résolution approchée d'équations.

1 Suites recurrentes

1.1 Définitions et premières propriétés

Définition 1. Soit (E,d) un espace métrique et $h \in \mathbb{N}^*$. Une suite $(u_n)_n$ à valeurs dans E est dit récurrente d'ordre h si il existe une application f de E^H dans E tel que $\forall n \geq h, \quad u_n = f(u_{n-1}, u_{n-2}, ...u_{n_h})$.

Proposition 2. *Si $(u_n)_n$ converge vers une limite l dans E et si f est continue en (l,l,...,l), alors on a l=f(l,l,...,l) (l est un point fixe de f)*

Proposition 3. *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et une fonction f de I dans $\mathbb{R}$ tel que I est f-stable. On considère une suite (u_n) qui vérifie : $u_0 \in I$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$.*

- *Si f est croissante, la suite (u_n) est monotone et son sens de monotonie est donnée par le signe de u_1-u_0*
- *Si f est décroissante, la fonction f o f est croissante et les suites (u_2n) (u_{2n+1}) sont monotones, et leur sens de monotonie est opposé.*

Exemple 4. La suite définie par $u_0 \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ et $u_{n+1} = \sin(u_n)$ est convergente vers 0.

1.2 Exemples de suites d'ordre 1 et d'ordre 2

Exemple 5. Suite arithmétique : $u_0 \in \mathbb{R}$ et $f(x) = x + q$. Alors $u_n = u_0 + nq$.
Exemple 6. Suite géométrique : $u_0 \in \mathbb{R}$ et $f(x) = ax$. Alors $u_n = u_0 a^n$. On donne aussi la formule de la progression géométrique : $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 \frac{1-a^{n+1}}{1-a} \underset{n\to+\infty}{\to} 0$ si $|a| < 1$.
Exemple 7. Suite arithmético-géométrique. $u_0 \in \mathbb{R}$ et $f(x) = ax + b$. La suite converge vers $l = \frac{b}{1-a}$ si $a \neq 1$. Et la suite $(u_n - l)_n$ est géométrique de raison a.
Exemple 8. Suite homéographique

Théorème 9. *Soit $(u_n)_n$ définit par u_0 et u_1 donné, et $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$. On pose $\Delta = a^2 + 4b$, discriminant de l'équation caractéristique ${}^{r2} - ar - b = 0$.*

- *Si $\Delta \neq 0$, en notant r_1 et r_2 les solutions de l'équation caractéristique, on à $u_n = Ar_1^n + Br_2^n$.*
- *Si $\Delta = 0$, en notant $r = \frac{a}{2}$ la solution double de l'équation caractéristique, on à $u_n = r^n * (An + B)$.*

Exemple 10 (Fibonnaci). La suite de Fibonnaci est définie par $F_0 = 0$, $F_1 = 1$, puis $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$. On a une expression pour tout n : $F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}((\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n - (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n)$

1.3 Développement asymptotique et vitesse de convergence

Définition 11. Soit $(u_n)_n$ une suite convergente vers l. Quitte à considérer $|u_n - l|$, on s'intéresse à la vitesse de convergence d'une suite $(u_n)_n$ positive qui tend vers 0.

- Une telle suite converge géométriquement vers 0 si $u_n = o(k^n)$, avec $0 < k < 1$.
- Une telle suive converge lentement vers 0 si elle est minorée par une suite $\frac{Cste}{n^\alpha}$ avec $\alpha > 0$

Proposition 12. *Soit $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes généraux positifs, tel que $u_n \sim v_n$.*

- *Si $\sum u_n$ converge, $\sum v_n$ converge et les restes vérifient $\sum_{k=n}^{\infty} u_k \sim \sum_{k=n}^{\infty} v_k$.*
- *Si $\sum u_n$ diverge, $\sum v_n$ diverge et les sommes partielles vérifient $\sum_{k=0}^{u} k \sim \sum_{k=0}^{n} v_k$.*

Application 13. *Soit f une application continue définie au voisinage de 0^+ admettant un développement asymptotique en 0 de la forme $f(x) = x - ax^\alpha + o(x^\alpha)$, où $a > 0$ et $\alpha > 1$. Alors pour $u_0 > 0$ assez petit, la suite u définie par $u_{n+1} = f(u_n)$ pour $n \in \mathbb{N}$ vérifie $u_n \sim \frac{1}{(na(\alpha-1))^{\frac{1}{\alpha-1}}}$.*

Application 14. *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 \in]-1, +\infty[$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = ln(1 + u_n)$. Alors on a le DA_2 suivant : $u_n = \frac{2}{n} + \frac{2\ln(n)}{3n^2} + o\left(\frac{\ln n}{n^2}\right)$.*

Application 15. $u_{n+1} = sin(u_n)$

2 Point fixe

2.1 Théorème de point fixe et applications

Théorème 16. *Soit (E,d) un espace complet et $f : E \to E$ une application k-contractante. Alors f admet un unique point fixe et toute suite définie par $u_0 \in E$ puis $u_{n+1} = f(u_n)$ converge vers ce point fixe*

Remarque 17. Si f^r est contractante ($r > 0$), on à le même résultat.

Application 18 (Théorème de Cauchy-Lipchitz)**.** *Soit I un intervale de $\mathbb{R}$, $F : I \times \mathbb{R}^d$. On considère le problème de Cauchy :*

$$\begin{cases} Y'(t) = F(t, Y(t))) \forall t \in I \\ Y(0) = Y_0 \in I \end{cases} \tag{1}$$

. Si l'application F est continue et localement lipschitzienne par rapport à la seconde variable, alors il existe $J \subset I$ tel qu'il existe dans J une unique solution de 1.

2.2 Etude des points fixes dans le cas réel d'ordre 1

Exemple 19. Faire un dessin en annexe des premiers termes d'une suite définie par $u_0 \in I$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ qui converge vers α point fixe de f. Tracer les 3 cas suivants : $> 1'(\alpha) > 0$ et $1 >' (\alpha) < 0$ et $f'(\alpha) > 1$.

Proposition 20. *Soit α un point fixe de f C^1 de R dans R. Il est dit attractif si $|f'(\alpha)| < 1$. Dans ce cas, il existe un intervalle I autour de $f(\alpha)$ tel que toute suite définie par $u_0 \in I$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ converge vers ce point fixe.*

Proposition 21. *Soit α un point fixe de f C^1 de R dans R. Il est dit répulsif si $|f'(\alpha) > 1$. Dans ce cas, il n'existe pas de suite non-stationnaire définie par $u_0 \in I$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ qui converge vers ce point fixe.*

Proposition 22. *On suppose que α est un point fixe attractif de $fC^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Dans ce cas si une suite définie par récurrence à l'aide de f converge vers α, on sait que la vitesse de convergence est géométrique de rapport $|f'(\alpha)|$.*

3 Application à la resolution approchée d'équations

3.1 Recherche d'un zéro d'une fonction

Proposition 23. *Le principe de la dichotomie. Vitesse de convergence linéaire.*

Théorème 24 (Méthode de Newton). *Soit $f : [c, d] \to \mathbb{R}$ de classe C^2. On suppose que $f(c) < 0 < f(d)$ et $f'(x) > 0$ sur $[c, d]$. On considère la suite définie par réccurence : $x_0 \in [c, d]$, $x_{n+1} = F(x_n)$ où $F : t \mapsto t - \dfrac{f(t)}{f'(t)}$. Alors :*

- *Faire un dessin en* ***ANNEXE****.*
- *f admet un unique zéro sur $[c, d]$. Il existe $\alpha > 0$ tel que $[a - \alpha, a + \alpha] = I$ soit F-stable et que $\forall x_0 \in [a - \alpha, a + \alpha] = I$, la suite $(x_n)_n$ converge quadratiquement vers a.*
- *Si de plus $f''(x) > 0$ sur $[c, d]$, alors le résultat précédent est valable pour $I = [a, d]$, et de plus $(x_n)_n$ est décroissante (ou constante) vers a et on à l'équivalent : $x_{n+1} - a \sim \dfrac{f''(a)}{2f'(a)}(x_n - a)^2$.*

3.2 Résolution de système linéaire (ALLAIRE)

Définition 25.

- On s'intéresse à la résolution du système linéaire $Ax = b$. On appelle décomposition régulière de A tout couple de matrice (M,N) avec M inversible tel que $A = M - N$.
- La méthode itérative lié à cette décomposition est : $x_0 \in \mathbb{R}^n$ et $Mx_{k+1} = Nx_k + b$.
- La méthode est dite convergente si $\forall x_0 \in \mathbb{R}^n$, la suite x_k converge vers une limite x. Dans ce cas, cette limite est alors solution du système $Ax = b$. La méthode est convergente si, $\forall x_0 \in \mathbb{R}^n$, $r_k = b - Ax_k$ converge vers 0 (ou $e_k = x - x_k$ converge vers 0).

Théorème 26. *Une méthode itérative est convergente $\iff$ $\rho(M^{-1}N) < 1$.*

Théorème 27 (Méthodes itératives usuelles).

- *Méthode du gradient à pas fixe : $M = \frac{I}{\alpha}$ et $N = \frac{I}{\alpha} - A$. On a donc $x_{k+1} = x_k + \alpha(b - Ax_k)$.*
- *Méthode de Jacobi : $M = D$ la diagonale de A et $N = D - A$.*
- *Méthode de Gauss-Seidel : $M = D - E$ et $N = F$ où -E est la partie inférieure stricte triangulaire de A, -F la partie supérieure stricte triangulaire.*

Lemme 28 **(Inégalité de Kantorovitch).** *Soit* $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$*, alors* $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $< Ax|x >< A^{-1}x|x > \leq \frac{1}{4}\frac{(\lambda_{max}+\lambda_{min})^2}{\lambda_{max}\lambda_{min}}$

Théorème 29 **(Algorithme du gradient à pas optimal).** *Objectif : On veut résoudre le système linéaire de taille n :* $Ax = b$*, avec* $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$*.*

- *Ce système admet un unique minimum* x^**.* x *est solution de ce système* $\iff$ x^* *est l'unique minimum de la fonctionnelle* $\Phi \begin{array}{ll} \mathbb{R}^n \to & \mathbb{R} \\ x \mapsto & \frac{1}{2} < Ax|x > - < b|x > \end{array}$
- *L'algorithme suivant :* $x_0 \in \mathbb{R}^n$*,* $r_0 = Ax_0 - b$*, puis* $x_{n+1} = x_n + \alpha_k r_k$*,* $r_{k+1} = r_k - A\alpha_k r_k$*,* $\alpha_k = \frac{||r_k[||^2}{< Ar_k|r_k >}$ *fournit une suite* $(x_k)_k$ *qui vérifie :* $||x_k - x^*|| \leq C(\frac{\lambda_{min}-\lambda_{max}}{\lambda_{min}+\lambda_{max}})^k$*, et qui converge donc bien vers* x^**.*

3.3 Recherche de valeurs propres

Théorème 30 **(Méthode de la puissance).** *Objectif : trouver la plus grande valeur propre en valeur absolue de A :* $|\lambda_1| \leq ... \leq |\lambda_n|$ *L'algorithme est le suivant :* $x_0 \in \mathbb{R}^n$*, avec* $||x_0 = 1$ *puis* $y_k = Ax_{k+1}$ *et* $x_k = \frac{y_k}{||y_k||}$*.*
Si A est diagonalisable, avec $B = (e_1, ...e_n)$ *une base de vecteur propre, si la valeur propre* λ_n *est simple et positive, et si le coefficient devant* e_n *dans la décomposition dans la base B de* x_0 *est non-nul, alors la méthode converge :* $x_k \underset{k\to+\infty}{\to} \pm e_n$ *et* $||y_k|| \underset{k\to+\infty}{\to} |\lambda_n|$

Remarque 31. En appliquant la méthode à la matrice A^{-1}, on est capable de trouver la plus petite valeur propre en valeur absolue.