219 – Extremums : existence, caractérisation, recherche. Exemples et applications.

Définition 1. Soit E un $\mathbb{R}$-e.v normé et X une partie de E. Une fonction $f : X \to \mathbb{R}$ admet un minimum (respectivement maximum) relatif en a si il existe une voisinage de V de a dans E tel que $\forall x \in V$, $f(a) \leq f(x)$ (respectivement $f(x) \leq f(a)$).
Dans les deux cas, on dit que f admet un extremum relatif en a. Il est dit stricte si l'inégalité est stricte.
Une fonction $f : X \to \mathbb{R}$ admet un minimum (respectivement maximum) global sur X en a si $\forall x \in X$, $f(a) \leq f(x)$ (respectivement $f(x) \leq f(a)$).
Petit **dessin** en à côté.

1 Existence et unicité des extremums

1.1 Compacité, coercivité et convexité

Théorème 2. *Si X est compact et f est continue sur X, alors f est bornée et atteint ses bornes.*

Contre-exemple 3. L'hypothèse de compacité est fondamentale :
$x \mapsto \dfrac{1}{t}$ est continue sur $]0,1]$ mais n'atteint pas ses bornes.
$x \mapsto t$ sur $[0,1[$ est continue bornée mais n'atteint pas sa borne supérieure
$x \mapsto \dfrac{1}{1+t^2}$ est continue,bornée sur $\mathbb{R}$, mais n'atteint pas sa borne inférieure 0.

Exemple 4. Soit A une partie compacte d'un espaxe métrique (E,d).

- $\forall y \in E$, il existe $x \in A$ tel que $d(y,x) = d(y,A)$
- Il existe $(a,b) \in E^2$ tel que $d(a,b) = \mathrm{diam}(a,b)$.
- Soit F une partie fermé non-vide de E un evn de dimension finie. $\forall y \in E$, il existe $x \in A$ tel que $d(y,x) = d(y,F)$

Définition 5. Une fonction $f : E \to \mathbb{R}$ est dite coercive si $|f(x)| \underset{||x|| \to +\infty}{\to} +\infty$.

Théorème 6. *Si f est continue et coercive sur E, alors f admet un minimum globale.*

Définition 7. Une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ (I intervalle de $\mathbb{R}$) est dite convexe si $\forall (x,y) \in I^2$, $\forall \lambda \in [0,1]$, $f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$. Elle est dite convave si l'inégalité est dans l'autre sens.
Concrètement, cela signifie que f est au dessus de ses cordes.
La convexité est dite stricte si l'inégalité est stricte.

Proposition 8.
- *Si f est convexe, tout extremum local est global.*
- *Si f est strictement convexe, f admet un unique extremum global.*

1.2 Projection sur un convexe fermé

Théorème 9 (Projection sur un convexe fermé). *Soit C un partie convexe et fermé non-vide de H espace de Hilbert. Alors pour tout $x \in H$, il existe un unique $y = P_C(x)$ tel que : $dist(x,C) = ||x-y||$. On dit que $y = P_C(x)$ est la projection de x sur C. On à la caractérisation suivante pour y dans H :*

$$y = P_C(x) \iff < x-y, z-y > \leq 0 \quad \forall z \in C$$

(dans le cas réel) On fait un dessin de la caractérisation.

Corollaire 10. *Si F est un sev fermé de H, on a :*

$$y = P_C(x) \iff < x-y, z > = 0 \quad \forall z \in F$$

Corollaire 11. *Si F est un sev fermé de H, on a : $H = F \oplus F^{\perp}$ et la projection sur F parallèllement à $F^{\perp}$ est P_F. On dit que P_F est la projection orthogonale sur F.*

Remarque 12. Ces résultats restent valable pour un espace euclidien, mais la démonstration est plus simple.

Application 13 (Problème des moindres carrés)**.** *Soit $A \in \mathbb{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et $b \in \mathbb{R}^n$. On cherche les solutions $x \in \mathbb{R}^p$ qui vérifient $||Ax - b|| = \min_{y \in \mathbb{R}^p} ||Ay_b||$.*

- *Ce problème possède un minimum $\bar{x}$, unique à $ker(A)$-près.*
- *x est solution du problème $\iff$ x vérifie ${}^tAAx = {}^tAb$.*

*C'est le problème rencontré lors du problème de régréssion linéaire (avec $p = 2$) : on cherche (a_0, a_1) qui minimise la quantité : $\displaystyle\sum_{k=1}^{m} |y_k - (a_0 + a_1 t_i)|^2$. On fait un dessin en **ANNEXE**.*

Théorème 14 (de représentation de Riesz). *Soit $\varphi : H \to \mathbb{R}$, alors il existe un unique $x \in H$ tel que : $\forall y \in H$, $\varphi(y) = < x|y >$.*

2 Extremum et différentiabilité

2.1 Condition du premier ordre

Cadre : Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$.

Proposition 15 (Condition nécéssaire du premier ordre). *Si $f : U \to \mathbb{R}$ admet un extrema relatif en $a \in U$ et si f est différentiable en a, alors $Df(a) = 0$. On fait un **dessin** à côté en dim 1.*
Un point qui vérifie $Df(c) = 0$ est appelé point-critique.

Contre-exemple 16. si U n'est pas ouvert et a est sur le bord : $x \mapsto x$ sur [0,1].
La réciproque est fausse : $x \mapsto x^3 n$

Théorème 17 (Roll). *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une application déribable sur $]a,b[$ et continue sur $[a,b]$, telle que $f(a) = f(b)$. Alors il existe $c \in]a,b[$ tel que $f'(c) = 0$.*

Proposition 18. *Soit U ouvert connexe de $\mathbb{R}^n$.On suppose que f est différentiable sur U. On à l'équivalence : f est convexe $\iff \forall (x,y) \in U^2$, $Df(x).(y-x) \leq f(y-x)$.*

Définition 19. Une fonction $U \to \mathbb{R}$ est dite convexe sur U convexe ouvert de $\mathbb{R}^n$ si, pour tout, $x, y \in U$, $\lambda \in [0,1]$, $f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$

Proposition 20. *Si $f : U \to \mathbb{R}$ (U ouvert convexe de $\mathbb{R}^n$) est convexe, alors f admet un extrema relatif en $a \iff a$ est un point critique de f.*

2.2 Conditions du 2ème ordre

Proposition 21. *Soit $f : U \to \mathbb{R}$ et $a \in U$.*

- *Si f admet en a un minimum local et si $D^2f(a)$ existe, alors nécéssairement $Df(a) = 0$ et $D^2f(a)$ est une forme quadratique (ou matrice symétrique) **positive**. (négative si maximum)*
- *Si $Df(a) = 0$ et $D^2f(a)$ est une forme quadratique (ou matrice symétrique) **définie-positive**, alors f admet un minimum local relatif stricte en a. (maximum si définie-négative).*

Application 22 (notation de monge). *Soit $f : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe C^2 sur U. On note $D^2(f)(a) = \begin{pmatrix} r & s \\ s & t \end{pmatrix}$ Alors :*

- *Si $\det(A) = rt - s^2 > 0$ et $r > 0$, f admet un minimum relatif.*
- *Si $rt - s^2 > 0$ et $r < 0$, f admet un maximum relatif.*
- *Si $rt - s^2 > 0$, f n'a pas d'extremum en a (point-col)*
- *Si $rt - s^2 = 0$, on ne peut pas conclure.*
- *Les dessins en **annexe** représentent ces situations*

Exemple 23. On considère $f : (x,y) \mapsto x^2 - y^2 + \frac{y^4}{4}$. Il y a trois candidats d'extremums : $(0,0)$, $(0, \pm\sqrt{2})$.
Le premier est un point col.
Les deux autres sont des minimums relatifs (et mêmes globaux !).

Proposition 24. *Soit U ouvert connexe de $\mathbb{R}^n$. On suppose que f est 2-fois différentiable sur U. On à l'équivalence : f est convexe $\iff \forall x \in U$, $D^2f(x)$ est une forme quadratique positive.*

Proposition 25. *Soit $f : U \to \mathbb{R}$ deux-fois différentiable. Alors f admet un extrema relatif en $a \iff a$ est un point critique de f et $\forall x \in U$, $D^2f(x)$ est une forme quadratique positive.*

2.3 Optimisation sous-contrainte

Théorème 26 (Des extremas liés). *Soit f,g_1,...,g_r des fonctions de classe C^1 de $U \to \mathbb{R}$ où U est un ouvert de $\mathbb{R}^n$. On désigne par Γ l'ensemble $\Gamma = \{x \in U \mid g_1(x) = ... = g_r(x) = 0\}$.*
Si f admet un extrema relatif sur Γ en a et si les formes linéaires $Dg_1(a), ..., Dg_r(a)$ sont indépendantes, alors il existe r uniques scalaires $(\lambda_1, ..., \lambda_r)$ tel que $Df(a) = \sum_{k=1}^{r} Dg_i(a)$

Exemple 27. Exemple d'application simple avec dessin en **annexe**.

Application 28. *Ce théorème permet de démontrer le théorème spectral où encore l'inégalité arithmético-géométrique.*

3 Optimisation numérique

Remarque 29. Pour trouver un extremum d'une fonction f, on cherche les points qui annule f'.

Théorème 30 (Méthode de Newton). *Soit $f : [c,d] \to \mathbb{R}$ de classe C^2. On suppose que $f(c) < 0 < f(d)$ et $f'(x) > 0$ sur $[c,d]$. On considère la suite définie par réccurence : $x_0 \in [c,d]$, $x_{n+1} = F(x_n)$ où $F : t \mapsto t - \frac{f(t)}{f'(t)}$. Alors :*

- *f admet un unique zéro en a sur $[c,d]$. Il existe $\alpha > 0$ tel que $[a-\alpha, a+\alpha] = I$ soit F-stable et que $\forall x_0 \in [a-\alpha, a+\alpha] = I$, la suite $(x_n)_n$ converge quadratiquement vers a.*
- *Si de plus $f''(x) > 0$ sur $[c,d]$, alors le résultat précédent est valable pour $I = [a,d]$, et de plus $(x_n)_n$ est décroissante (ou constante) vers a et on à l'équivalent : $x_{n+1} - a \sim \frac{f''(a)}{2f'(a)}(x_n - a)^2$.*

Lemme 31 **(Inégalité de Kantorovitch).** *Soit* $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$, *alors* $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $< Ax|x >< A^{-1}x|x > \leq \frac{1}{4}\frac{(\lambda_{max}+\lambda_{min})^2}{\lambda_{max}\lambda_{min}}$

Théorème 32 **(Algorithme du gradient à pas optimal).** *Objectif : On veut résoudre le système linéaire de taille* n *:* $Ax = b$, *avec* $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$.

- *Ce système admet un unique minimum* x^*. x *est solution de ce système* $\iff$ x^* *est l'unique minimum de la fonctionnelle* $\Phi \begin{array}{ll} \mathbb{R}^n \to & \mathbb{R} \\ x \mapsto & \frac{1}{2} < Ax|x > - < b|x > \end{array}$
- *L'algorithme suivant :* $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $r_0 = Ax_0 - b$, *puis* $x_{n+1} = x_n + \alpha_k r_k$, $r_{k+1} = r_k - A\alpha_k r_k$, $\alpha_k = \frac{||r_k[||^2}{< Ar_k|r_k >}$ *fournit une suite* $(x_k)_k$ *qui vérifie :* $||x_k - x^*|| \leq C(\frac{\lambda_{min}-\lambda_{max}}{\lambda_{min}+\lambda_{max}})^k$, *et qui converge donc bien vers* x^*.

Développements possibles

-
-

Remarques

-
-