213 – Espaces de Hilbert. Bases hilbertiennes. Exemples et applications.

1 Espace préhilbertien et définitions

1.1 Propriétés élémentaires des espaces préhilbertiens

Définition 1. Soit H un espace vectoriel réel (resp complexe). On appelle produit scalaire sur H toute forme bilinéaire symétrique (resp hermitienne) qui est définie positive sur H. On le note $< x|y >$ pour x et y deux vecteurs de H. Un espace H munit d'un produit scalaire est appellé préhilbertien. En particulier, les espaces euclidiens et hermitiens sont des espaces préhilbertiens.

Exemple 2. — $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{C}^n$ munit du produit scalaire canonique.

— Soit (Ω, A, μ) un espace mesuré. Alors on munit $L^2(\Omega, A, \mu)$ du produit scalaire $< f|g >=$
$$\int_\Omega fg\,\mathrm{d}\mu$$
dans le cas réel, et $< f|g >=$
$$\int_\Omega f\bar{g}\,\mathrm{d}\mu$$
dans le cas complexe.

— En particulier, sur l_2, on définit $< x|y >= \sum_{n=1}^\infty x_n y_n$ dans le cas réel, $< x|y >= \sum_{n=1}^\infty x_n \bar{y_n}$ dans le cas complexe.

Proposition 3. *On définit la norme associé au produit scalaire :* $||x|| = \sqrt{< x|x >}$

— $||x+y||^2 = ||x||^2 + ||y||^2 + 2 < x|y >$ *dans le cas réel.*

— $||x+y||^2 = ||x||^2 + ||y||^2 + 2Re < x|y >$ *dans le cas complexe.*

— *(Inégalité du parallélogramme)* $||x+y||^2 + ||x-y||^2 = 2(||x||^2 + ||y||^2)$

— *(Inégalité de Cauchy-Schwarz)* $| < x|y > | \leq ||x||\,||y||$, *avec égalité si et seulement si x et y sont linéairement liés.*

$||.||$ *définit donc bien une norme sur H, appelée norme hilbertienne.*

Corollaire 4. *Pour chaque* $y \in H$, *la forme linéaire*

$$\begin{aligned} \phi_y : \quad & \mathbb{H} \to \mathbb{K} = \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C} \\ & x \mapsto < x|y > \end{aligned} \tag{1}$$

est continue, et sa norme dans H^* *est* $|||\phi_y||| = ||y||$.

Définition 5. Soit H un espace préhilbertien munit de sa norme $||.||$. Si H est complet pour cette norme, alors c'est un hilbert.

Exemple 6. — Les espaces euclidiens et hermitiens sont des Hilberts.

— D'après le théorème de Riesz-Fisher, pour (Ω, A, μ) un espace mesuré, $L^2(\Omega, A, \mu)$ est un espace de Hilbert.

Définition 7. — On dit que deux vecteurs x et y sont orthogonaux dans H si $< x|y >= 0$.

— Soit A un sous-ensemble inclus dans H. Alors on définit l'orthogonal de A : $A^\perp = \{x \in Htq < x|y >= 0 \forall y \in H\}$

Exemple 8. (1,1) et (1,-1) sont orthogonaux dans $\mathbb{R}^2$.

Théorème 9 (Théorème de Pythagore). *Soit x,y dans H.*

— *Dans le cas réel, on à* $x \perp y \iff ||x+y||^2 = ||x||^2 + ||y||^2$

— *Dans le cas comlexe, on à* $x \perp y \iff ||x+y||^2 = ||x||^2 + ||y||^2$ *et* $||x+iy||^2 = ||x||^2 + ||y||^2$

Proposition 10. *Soit A,B deux sous-ensembles de H.*

— $A^\perp$ *est un sev fermé de H*

— *Si* $A \subseteq B \subseteq H$, $B^\perp \subseteq A^\perp$.

2 Théorème de projection sur un convexe fermé et conséquences

Dans cette partie, H est un espace de Hilbert, réel ou complexe.

Théorème 11 **(Projection sur un convexe fermé).** *Soit C un partie convexe et fermé non-vide de H. Alors pour tout $x \in H$, il existe un unique $y = P_C(x)$ tel que : $dist(x, C) = ||x - y||$. On dit que $y = P_C(x)$ est la projection de x sur C. On à la caractérisation suivante pour y dans H :*

$$y = P_C(x) \iff < x - y, z - y > \leq 0 \forall z \in C$$

(dans le cas réel) On fait un dessin de la caractérisation.

Corollaire 12. *Si F est un sev fermé de H, on a :*

$$y = P_C(x) \iff < x - y, z >= 0 \forall z \in F$$

Corollaire 13. *Si F est un sev fermé de H, on a : $H = F \oplus F^{\perp}$ et la projection sur F parallèllement à $F^{\perp}$ est P_F. On dit que P_F est la projection orthogonale sur F.*

Corollaire 14. *Pour tout F s.e.v de H, on à $F^{\perp\perp} = \bar{F}$*

Corollaire 15. *Soit F un s.e.v de H, on à $FestdensedansH \iff F^{\perp} = \{0\}$*

Théorème 16 **(Théorème de représenation de Riesz).** *On rappelle que H^* est l'ensemble des formes linéaires continues sur H. Soit H un espace de Hilbert. Pour tout φ inH^*, il existe un unique $y \in H$ tel que $\varphi(x) =< x|y > \forall x \in H$.*

Application 17 (Adjoint d'un operateur)**.** *Soit T un une application linéaire continue de H dans H. Alors il existe un unique opérateur T^* de H dans H tel que $< Tx|y >=< x|T^*y >, \forall x, y \in H$. De plus, $||T| = ||T^*||$.*

3 Systèmes orthonormées et bases hilbertiennes

Définition 18. Soit H préhilbertien. Une famille $(u_i)_{i \in I}$ est dit orthonormée si $< u_i, u_j >= \delta_{ij}$ pour tout couple i,j de I.

Exemple 19. Dans $L^2(0,1)$, la famille trigonométrique $\{e_n, n \in \mathbb{Z}\}$ est orthonormée.

Proposition 20. *Soit $(u_1, ..., u_n)$ une famille orthonormée de H préhilbertien. Alors pour tout scalaire $a_1, ..., a_n$, on à : $|| \sum_{i=1}^n a_i u_i||^2 = \sum_{i=1}^n |a_i|^2$*

Corollaire 21. *Toutr famille orthonormée est libre.*

Proposition 22 **(Inégalité de Bessel).** *Soit $(u_1, ..., u_n)$ une famille orthonormée de H préhilbertien. Alors pour tout x dans H, on à $\sum_{i=1}^n | < x|u_i > |^2 \leq ||x||^2$*

Théorème 23. *Soit H une un espace préhilbertien et $(u_n)_n$ une suite orthonormée. Alors si on peut peut écrire $x = \sum_{i=1}^{\infty} {}_i u_i$ (à comprendre au sens d'une limite !), alors on a forcément ${}_n =< x|u_n >$ pour tout n.*

Proposition 24. *Soit $(u_1, ..., u_n)$ une famille orthonormée de H préhilbertien. et $x = \sum_{i=1}^{\infty} {}_n u_n$. On note $F_n = Vect(u_1, ..., u_n)$. Alors $P_{F_n}(x) = \sum_{i=1}^n {}_i u_i$*

Proposition 25. *Soit H un espace de Hilbert et $(u_n)_n$ une suite orthonormée dans H, alors pour toute suite $({}_n)_n$ dans l^2, la série $\sum_{n=1}^{\infty} {}_n u_n$ converge dans H.*

Définition 26. On dit qu'une suite orthonormée dans un espace de hilbert H est une base hilbertienne de H si $\bar{Vect(u_1, ..., u_n, ...)} = H$. Dans ce cas, l'espace H est d'ailleurs séparable.

Théorème 27 **(Expression dans une base hilbertienne, formule de Parseval).** *Soit $(u_n)_n$ une base hilbertienne de H.*

- *Alors tout élément de H s'écrit $x =_{n=1}^{\infty} {}_n u_n$ (au sens de la limite dans H !) où ${}_n =< x|u_n >$ pour tout n.*
- *Pour tout x et y dans H, on à les formules $< x|y >= \sum_{n=1}^{\infty} < x|u_n >< y|\bar{u}_n >$ et $||x||^2 = \sum_{n=1}^{\infty} | < x|u_n > |^2$.*

Corollaire 28. *Soit H un espace de hilbert séparable possédant $(u_n)_n$ comme base hilbertienne. Alors l'application linéaire*

$$\begin{aligned} S : \quad & H \to l^2 \\ & x \mapsto (< x|u_n >)_{n \in \mathbb{N}^*} \end{aligned} \tag{2}$$

est un isomorphisme qui conserve le produit scalaire. Son inverse est :

$$\begin{aligned} S^{-1} : \quad & l^2 \to H \\ & (a_n)_n \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} a_n u_n \end{aligned} \tag{3}$$

Théorème 29. *Tout espace de Hilbert séparable admet une base hilbertienne.*

Corollaire 30. *Tout les espaces de Hilbert séparables sont isomorphes à l^2.*

4 Les espaces L^2 à poids

Définition 31. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. On dit que ρ est une fonction poid si elle est définie et mesurable sur I, telle que

$$\int_I |x|^n \rho d\lambda$$

soit finie pour tout entier naturel n. On note $L^2(I, \rho)$ l'ensemble des fonctions de carrés intégrables pour cette mesure, quotienté par l'égalité preque-partout. $L^2(I, \rho)$ **est un espace de Hilbert**.

Proposition 32. *La famille des monomes $(x \mapsto x^n)_n$ fournit une famille libre de $L^2(I,\rho)$. Le procédé d'orthogonalisation permet de fournir une famille libre de polynômes orthogonaux : $(P_n)_n$, où P_n est de degré n.*

Théorème 33 (Base hilbertienne des polynômes orthogonaux). *On suppose qu'il existe α positif tel que*

$$\int_I e^{\alpha|x|}\rho d\lambda$$

soit finie. Alors la famille des polynômes orthogonaux associées à ρ est une base hilbertienne de $L^2(I,\rho)$.

Exemple 34. Si $I =]0,+\inf[$, $\rho(x) = x^{-ln(x)}$. En considérant la fonction $f(x) = sin(2\pi ln(x))$, on montre que la famille des polynômes orthogonaux associée à ρ n'est pas une base hilbertienne.

Application 35. *Pour $I =]-1,1[$ et $\rho(x) = 1$, on trouve les polynômes de Legendre. On montre que $p_n(x) = \frac{n!}{(2n)!}(\frac{d}{dx})^n(x^2-1)^n$ forment une base hilbertienne de $L^2(]-1,1[,\rho)$ à normalisation près*

Application 36. *Pour $I = \mathbb{R}$ et $\rho(x) = e^{-x^2}$, on trouve les polynômes de Hermite. On montre que $p_n(x) = (-1)^n 2^{-n} e^{x^2}(\frac{d}{dx})^n e^{-x^2}$ forment une base hilbertienne de $L^2(\mathbb{R},\rho)$ à normalisation près*

5 Série de Fourier

Définition 37. On considère l'ensemble des fonctions 2π-périodique de carré intégrable sur $[0,2\pi]$ à valeurs dans $\mathbb{C}$, que l'on note $L^2_{2\pi}$. On munit cet espace du produit scalaire : $< f|g >=$

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\bar{g(x)}dx$$

Théorème 38. *L'espace $L^2_{2\pi}$ est un espace de Hilbert, et la famille trigonométrique en forme une base hilbertienne.*

Exemple 39 (Fonction signal). Soit $\epsilon \in]0,\pi[$ et σ_ϵ la fonction de $L^\infty_{2\pi}$ telle que $\sigma_\epsilon(t) = 1$ si $|t| \leq \epsilon$ et $\sigma_\epsilon(t) = 0$ si $\epsilon < |t| \leq \pi$ (**voir dessin en annexe**). Alors pour tout t, $S_N(\sigma_\epsilon)(t) = \frac{\epsilon}{\pi} + \sum_{n=-N(n\neq 0)}^{N} \frac{\sin n\epsilon}{n\pi} e_n(t)$.

Théorème 40. *Soit f dans $L^2_{2\pi}$, alors on peut écrire dans $L^2_{2\pi}$ $f = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f)e_n$ où $c_n(f) =< f|e_n >$ est appellé n-ème coefficient de fourier de F.*

Application 41 (Formule de Parseval)**.** *Pour tout f dans $L^2_{2\pi}$, on à $||f||_2^2 = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(f)|^2$*

Application 42.

- *Soit g la fonction 2π-périodique définie par $g(x)$=1 si $0 \leq x < \frac{\pi}{2}$, $g(\frac{\pi}{2})$=0 et $g(x) = -1$ si $\frac{\pi}{2} < x \leq \pi$. L'égalité de Parseval donne $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$.*
- *Soit j la fonction 2π-périodique définie par $j(x) = |x|$ sur $[-\pi,\pi]$. L'égalité de Parseval donne alors $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^4} = \frac{\pi^4}{96}$*