209 – Approximation d'une fonction par des polynômes et des polynômes trigonométriques. Exemples et applications.

1 Approximation par des polynômes

1.1 Approximation des fonctions régulières[G]

Théorème 1 (Théorème de Taylor-Lagrange). *Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^n sur $[a, b]$, tel que $f^{(n+1)}$ existe sur $]a, b[$. Alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(b-a)^{n+1}$*

Théorème 2 (Formule de Taylor-Young). *Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^{n+1} sur $[a, b]$. Alors pour h proche de a on à : $f(a) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a+h)}{k!}h^k + \frac{f^{(n+1)}(a)}{(n+1)!}h^{n+1} + o(h^{n+1})$.*

Exemple 3. Cela nous permet d'obtenir les développements limités de fonctions usuelles. **Voir tableau en annexe**.

Application 4. *Les formules de Taylor permettent d'étudier la consistance des schémas numériques d'équations différentielles (où aux dérivées partielles) :*
Soit $[a, b]$ divisée en $(x_1, ..., x_n)$ avec $x_{i+1} - x_i = h$ le pas du schéma et $U \in C^2([a, b])$. Le schéma numérique $\frac{U^{n+1} - 2U^n + U^{n-1}}{h^2}$ est une approximation de $U''(x_n)$ d'ordre 2.

Application 5 (Méthode de Newton). *Ces formules sont à l'origine de la méthode de Newton pour trouver un zéro approché de $f(x) = 0$.*

Théorème 6 (Formule de Taylor-Young à reste intégrale). *Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^{n+1} sur $[a, b]$. Alors $f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k + \int_a^b \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(b-t)^{n+1}dt$*

1.2 Interpolation polynomiale et formules de quadrature [D]

Théorème 7 (Interpolation de Lagrange). *Soit $f : I \mapsto \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$, $(x_0, ..., x_n) \in I^{n+1}$ distincts. Alors il existe un unique polynôme L de degré au plus n tel que $\forall i \in \{0, ..., n\}$, $L(x_i) = f(x_i)$.*
Ce polynôme est appelé polynôme interpolateur de Lagrange de f aux points $(x_0, ..., x_n)$.
Il est définie par $L(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i)l_i(x)$ où $l_i(x) = \Pi_{j=1}^{n} \frac{x - x_i}{x_j - x_i}$

Proposition 8. *Avec les notations précédentes. Si de plus $f \in C^{n+1}([a, b])$, on à : $\forall x \in [a, b]$, $\exists c \in [a, b]$ tel que $f(x) - L(x) = \frac{(x-x_0)...(x-x_n)}{n!}f^{n+1}(c)$*

Proposition 9 (Formule de quadrature élémentaire par Lagrange). *Avec les hypothèses de la propriété précédente, l'erreur commise en remplaçant $\int_a^b f(t)dt$ par $\int_a^b L(t)dt$ est : $\int_a^b f(t)dt - \int_a^b L(t)dt \leq \frac{||f^{n+1}||_{\infty,[a,b]}}{n!} \int_a^b |N(t)|dt$ où $N(t) = (t-x_0)...(t-x_n)$*

Théorème 10 (Méthode classique de quadrature). *On note $I(f) = \int_{a^b} f(t)dt$*

- ***Méthode des rectangles à gauche*** *: On remplace $I(f)$ par $R(f) = (b-a)f(a)$*
- ***Méthode du point milieu*** *: On remplace $I(f)$ par $R(f) = (b-a)f(\frac{a+b}{2})$*
- ***Méthode des trapèzes*** *: On remplace $I(f)$ par $R(f) = \frac{(b-a)}{2}(f(a)f(b)$*

*On donne des dessins **en annexe**.*

Proposition 11. *On donne des majorations des erreurs $E(f) = |I(f) - R(f)|$ des méthodes ci-dessus :*

- ***Méthode des rectangles à gauche*** *: Si $f \in C^1([a, b])$, $E(f) \leq \frac{(b-a)^2}{2}||f'||_{\infty,[a,b]}$*
- ***Méthode du point milieu*** *:Si $f \in C^2([a, b])$, $E(f) \leq \frac{(b-a)^3}{24}||f''||_{\infty,[a,b]}$*
- ***Méthode des trapèzes*** *: Si $f \in C^2([a, b])$, $E(f) \leq \frac{(b-a)^3}{12}||f''||_{\infty,[a,b]}$*

Définition 12. On appelle méthode de quadrature composée les méthodes qui consiste à subdivisionner $[a, b]$ en $\cup_{k=0}^{N-1}[a + \frac{k}{N}(b-a), a + \frac{k+1}{N}(b-a)$, puis à approcher les intégrales $\int_{a+\frac{k}{N}(b-a)}^{a+\frac{k+1}{N}(b-a)} f(t)dt$ dans l'objectif d'approcher $\int_{a^b} f(t)dt$. Il est facile de trouver les erreurs commises dans les cas précédent si on les execute en composées.

Remarque 13. Ces formules de quadrature sont à l'origine des méthodes classiques d'approximation numériques des équations différentielles.

1.3 Le théorème de Weierstrass[G]

Théorème 14 (De Weierstrass). *Toute fonction continue sur $[a, b]$ est limite uniforme d'une suite de polynôme.*

Exemple 15. On donne une suite de polynômes qui tend uniformément vers $\sqrt{t}$ sur $[0, 1]$.

Remarque 16. Le théorème est faux sur un intervalle non-bornée : Une fonction $f\mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ limite uniforme sur $\mathbb{R}$ d'une suite de fonction polynômes est une fonction polynôme.

2 Approximation par des polynômes trigonométriques

2.1 Les séries de Fourier [ZQ][G]

Cadre : On définit les espaces de fonctions 2π-périodique de $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$ suivants :

- L'espace $C^0_{2\pi}$ des fonctions continues.
- L'espace $L^p_{2\pi}$ pour $1 \leq p < \infty$ des (classes de) fonctions mesurables, tel que : $||f||_p = (\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(t)|^p dt)^{\frac{1}{p}} < \infty$

Définition 17. Soit $f \in L^1_{2\pi}$ et $n \in \mathbb{Z}$. On définit le n-ème coefficient de Fourier de f par la formule $c_n(f) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)e^{-int}dt$.

Soit f dans $L^1_{2\pi}$ et $N \in \mathbb{N}$. On définit la somme partielle de Fourier d'indice N de f par $S_N(f) = \displaystyle\sum_{n=-N}^{N} c_n(f)e_n$, avec $e_n : t \mapsto e^{int}$. La somme partielle de f est un **polynôme trigonométrique**.

Définition 18. Soit f dans $L^1_{2\pi}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. On définit les coefficients suivants :

$$a_n(f) = \int_0^{2\pi} f(t)\cos(nt)dt \text{ et } b_n(f) = \int_0^{2\pi} f(t)\sin(nt)dt$$

La somme de Fourier partielle de f s'écrit alors :

$$S_N(f)(x) = \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{n=1}^{N} a_n(f)\cos(nx) + b_n(f)\sin(nx)$$

De plus, on a les relations suivantes entre les coefficients : $a_n(f) = c_n(f) + c_{-n}(f)$ et $b_n(f) = i(c_n(f) - c_{-n}(f))$

Remarque 19. Si f est paire, les $a_n(f)$ sont nuls, et on à $c_n(f) = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} f(t)\cos(nt)dt$.

Si f est impaire, les $b_n(f))$ sont nuls, et on à $c_n(f) = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} f(t)\sin(nt)dt$.

2.2 Convergence ponctuelle et uniforme [ZQ]

Proposition 20 (Noyau de Dirichlet). *Pour $N \in \mathbb{N}$, on définit le noyau de Dirichlet d'ordre N par $D_N = \displaystyle\sum_{n=-N}^{N} e_n$. Il vérifie les propriétés suivantes :*

- *D_N est pair et $\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} D_N(t)dt = 1$*
- *$D_N(x) = \dfrac{\sin\left((N+\frac{1}{2})x\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$*
- *$D_N * f = S_N(f)$ (convolution dans L^2)*

Théorème 21 (Théorème de Dirichlet). *Soit $f \in L^1_{2\pi}$ et $x_0 \in [0, 2\pi]$. On suppose que f admet des limites a droites et à gauche en x_0 que l'on note $f(x_0-)$ et $f(x_0+)$ et que la fonction h : $h \mapsto \dfrac{f(x_0+h) + f(x_0-h) - f(x_0+) - f(x_0-)}{h}$ est bornée au voisinage de 0.*

Alors $S_N(f)(x_0) \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} \dfrac{f(x_0+) + f(x_0-)}{2}$

Corollaire 22. *Si f est 2π-périodique et de classe C^1 par morceaux, alors pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\displaystyle\lim_{N\to\infty} S_N(f)(x) = \frac{f(x+) + f(x-)}{2}$. De plus, si f est continue en x, alors on à $\displaystyle\lim_{N\to\infty} S_N(f)(x) = f(x)$*

Exemple 23 (Fonction signal). Soit $\epsilon \in]0, \pi[$ et σ_ϵ la fonction de $L^\infty_{2\pi}$ telle que $\sigma_\epsilon(t) = 1$ si $|t| \leq \epsilon$ et $\sigma_\epsilon(t) = 0$ si $\epsilon < |t| \leq \pi$ (**voir dessin en annexe**). Alors pour tout t, $S_N(\sigma_\epsilon)(t) = \dfrac{\epsilon}{\pi} + \displaystyle\sum_{n=-N(n\neq 0)}^{N} \frac{\sin n\epsilon}{n\pi}e_n(t)$.

Proposition 24. *On définit le noyau de Fejer d'ordre $N > 0$: $K_N = \displaystyle\sum_{i=0}^{N-1} \frac{D_i}{N}$. Il vérifie :*

- *$K_N(x) = \displaystyle\sum_{n=-N}^{N}\left(1 - \frac{|n|}{N}e_n\right) = \frac{1}{N}\left(\frac{\sin(\frac{Nx}{2})}{\sin\frac{x}{2}}\right)^2$*

- $(K_N)_{N\in\mathbb{N}}$ *est une approximation de l'unité.*
- $\sigma_N(f) = f * K_N$ *où* $\sigma_N(f) = \dfrac{S_0(f) + ... + S_{N-1}(f)}{N}$ *pour tout* $f \in L^1_{2\pi}$

Remarque 25. On a en fait que $(K_N)_{N\in\mathbb{N}}$ est une approximation de l'unité.

Théorème 26 (Théorème de Fejer). *Soit* $f \in C^0_{2\pi}$. *Alors* $||\sigma_N(f)||_\infty \leq ||f||_\infty$ $\forall N \in \mathbb{N}^*$ *et* $\sigma_N(f)$ *converge uniformément vers* f.

Corollaire 27.
- *Soit* $f \in C^0_{2\pi}$ *et* $x_0 \in \mathbb{R}$ *tel que* $S_N(f)(x_0) \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} l$. *Alors* $f(x_0) = l$.
- *Soit* $f \in C^0_{2\pi}$ *telle que* $\sum |c_n(f)| < \infty$. *Alors f est développable en série de Fourier* $f = \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(f)e_n$

Exemple 28 (Fonction triangle). Soit $\epsilon \in]0, pi[$, on définit T par $T(t) = 1 - \frac{|t|}{\epsilon}$ si $|t| \leq \epsilon$ et $T(t) = 0$ si $\epsilon \leq |t| \leq \pi$. T est développable en série de Fourier : $T(t) = \dfrac{\epsilon}{2\pi} + \displaystyle\sum_{N=-\infty (n\neq 0)}^{\infty} \dfrac{1-\cos(n\epsilon)}{n^2\pi\epsilon}\cos(nt)$. **Voir dessin en annexe.**

Corollaire 29 (Comparaison). *Soit* $f \in C^0_{2\pi}$. *Si* $k > 1$ *et* $c_n(f) = O(|n|^{-k})$, *alors* $f \in C^{k-2}$.

3 Méthode hilbertienne

3.1 L'espace hilbertien $L^2_{2\pi}$ [ZQ]

Définition 30. $L^\infty_{2\pi}$ l'espace des (classes de) fonctions mesurables, tel que : $||f||_\infty < \infty$, avec $||f||_\infty$ la borne supérieure essentielle de $|f|$

En particulier, $L^2_{2\pi}$ est un espace de Hilbert muni du produit scalaire

$$\langle f|g\rangle = \int_0^{2\pi} f(t)\overline{g(t)}dt$$

Corollaire 31. *La famille* $\{e_n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ *forme une base hilbertienne de* $L^2_{2\pi}$.

Corollaire 32 (Conséquences).
- *Soit* $f \in L^2_{2\pi}$, *alors* $f \overset{L^2_{2\pi}}{=} \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(f)e_n$ *où l'égalité est au sens de la convergence* $L^2_{2\pi}$.
- *On a de plus l'égalité de Parseval :* $\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} |f(t)|^2dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n(f)|^2$

Corollaire 33 (Convergence normale). *Soit* $f \in C^0_{2\pi}$ *et de classe* C^1 *par morceaux. Alors* $S_N(f)$ *converge normalement vers* f.

Application 34 (Equations de la chaleur)**.** *Historiquement, les séries de Fourier ont permis de résoudre explicitement l'équation de la chaleur sur le cercle en cherchant les solutions sous forme d'une série de Fourier.*
De plus, les séries de Fourier sont aussi un outil pour réaliser l'analyse de Von Neumann des EDP, afin d'obtenir des conditions CFL assurant la stabilité L^2*du schéma.*

3.2 Polynôme orthogonaux sur $L^2(I,\rho)$ [Obj ag] [Farraut]

Définition 35. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. On dit que ρ est une fonction poid si elle est définie et mesurable sur I, telle que

$$\int_I |x|^n \rho d\lambda$$

soit finie pour tout entier naturel n. On note $L^2(I,\rho)$ l'ensemble des fonctions de carrés intégrables pour cette mesure, quotienté par l'égalité preque-partout. $L^2(I,\rho)$ **est un espace de Hilbert**.

Proposition 36. *La famille des monomes* $(x \mapsto x^n)_n$ *fournit une famille libre de* $L^2(I,\rho)$. *Le procédé d'orthogonalisation permet de fournir une famille libre de polynômes orthogonaux :* $(P_n)_n$, *où* P_n *est de degré* n.

Théorème 37 (Base hilbertienne des polynômes orthogonaux). *On suppose qu'il existe* α *positif tel que*

$$\int_I e^{\alpha|x|}\rho d\lambda$$

soit finie. Alors la famille des polynômes orthogonaux associées à ρ *est une base hilbertienne de* $L^2(I,\rho)$.

Exemple 38. Si $I =]0, +\inf[$, $\rho(x) = x^{-ln(x)}$. En considérant la fonction $f(x) = sin(2\pi ln(x))$, on montre que la famille des polynômes orthogonaux associée à ρ n'est pas une base hilbertienne.

Application 39. *Pour* $I =]-1,1[$ *et* $\rho(x) = 1$, *on trouve les polynômes de Legendre. On montre que* $p_n(x) = \dfrac{n!}{(2n)!}(\dfrac{d}{dx})^n(x^2-1)^n$ *forment une base hilbertienne de* $L^2(]-1,1[,\rho)$ *à normalisation près*

Application 40. *Pour* $I = \mathbb{R}$ *et* $\rho(x) = e^{-x^2}$*, on trouve les polynômes de Hermite. On montre que* $p_n(x) = (-1)^n 2^{-n} e^{x^2} (\frac{d}{dx})^n e^{-x^2}$ *forment une base hilbertienne de* $L^2(\mathbb{R}, \rho)$ *à normalisation près*