202 – Exemples de parties denses et applications.

1 Définitions et premières propriétés

1.1 Définitions

Définition 1. Soit (E,d) un espace métrique. Une partie $A \subset E$ est dite dense dans E si $\overline{A} = E$.

Remarque 2. Cela signifie que : $\forall \varepsilon > 0, \forall x \in E, \exists a \in A$ tel que $d(x,a) < \varepsilon$.

Exemple 3.
— $]0,1[$ est dense dans $[0,1]$
— $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$

Théorème 4 (Caractérisation séquentielle). *A est dense dans E $\iff$ $\forall x \in E$, il existe $(a_n)_n \in A^{\mathbb{N}}$ telle que $a_n \underset{n\to+\infty}{\to} x$*

Théorème 5 (prolongement des applications uniformément continues). *Soit (E,d) un espace métrique **complet** et A une partie dense de E. Soit $f : A \to \mathbb{R}$ uniformément continue sur A. Alors il existe une unique application g qui prolonge f sur E, et cette application est uniformément continue.*

Remarque 6. C'est ce résultat qui va permettre de prolonger la transformée de Fourier définie sur l'espace de Scwartz à l'espace L^2

Exemple 7. Les sous-groupes additifs de $\mathbb{R}$ sont soit dense dans $\mathbb{R}$, soit de la forme $a\mathbb{Z}$, $a \in \mathbb{Z}$.

Application 8. *Si $\theta \in \mathbb{R}/\mathbb{Q}$, $\{e^{2i\pi n\theta} \mid n \in \mathbb{Z}\}$ est dense dans $S^1 = \{e^{it} \mid t \in \mathbb{R}\}$*

1.2 Densité dans les espaces $L^p(\mathbb{R}, B(\mathbb{R}), \lambda)$

Proposition 9. *Les fonctions étagées intégrables sont denses dans $L^p(\mathbb{R}, B(\mathbb{R}), \lambda), ||.||_p$.*

Proposition 10. *Les fonctions continues à support compacts sont denses dans $L^p(\mathbb{R}, B(\mathbb{R}), \lambda), ||.||_p$.*

Application 11. *L'opérateur de translation $\tau_t : (xf(x)) \mapsto (x \mapsto f(x+t))$ est un opérateur continue sur $(L^p, ||.||_p)$.*

Théorème 12. *Les fonctions $C^\infty_C(\mathbb{R})$ sont denses dans $(L^p, ||.||_p)$ $(p \neq \infty)$*

Application 13 (Lemme de Riemmann-Lebesgue). *Soit $f \in (L^1(\mathbb{R}, B(\mathbb{R}), \lambda), ||.||_p)$, alors $\int_{\mathbb{R}} f(t)e^{itx}dt \underset{x\to\pm\infty}{\to} 0$*

1.3 Densité dans les espaces de Matrices

Cadre : $\mathbb{K}= \mathbb{R}$ où $\mathbb{C}$, on peut se munir de n'importe quelle norme sur $M_n(\mathbb{K})$

Théorème 14. $\overline{GL_n(\mathbb{K})} = M_n(\mathbb{K})$

Corollaire 15. *Soient A,B deux matrices à coefficients dans $\mathbb{K}$, alors $\chi_{AB} = \chi_{BA}$*

Corollaire 16. *L'application $A \det(A)$ est C^∞ et on à, pour tout A, H dans $M_n(\mathbb{K})$, $Ddet_A(H) = Tr({}^tCom(A)H)$.*

Théorème 17. $T_n(\mathbb{K}) = \overline{D_n(\mathbb{K})}$ *(matrice triangulaire et diagonalisable respectivement)*

Remarque 18. En particulier, si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, on à que toute matrice à coefficient complexe est limite d'une suite de matrice diagonalisable.

2 Approximation de fonctions régulières

2.1 Par des polynômes

Théorème 19 (de Weierstrass). *L'ensemble des polynômes sur $[a,b]$ est dense dans $C^0[a,b]$*

Théorème 20 (Heine). *Soit $f \in C^0([a,b])$, alors f est uniformément continue sur $[a,b]$*

Corollaire 21. *Les fonctions en escalier sont denses dans $C^0([a,b])$*

Théorème 22 (Dini).
— *Une suite croissante de fonctions continues sur [a,b] qui converge simplement vers $f \in C^0([a,b])$ converge uniformément vers f.*
— *Une suite de fonctions croissantes qui converge simplement vers $f \in C^0([a,b])$ converge uniformément vers f.*

Application 23. *On donne une suite de polynôme qui converge uniformément vers $t \mapsto \sqrt{t}$ sur $[0,1]$*

2.2 Par des polynômes trigonométriques

Définition 24. L'espace $L^2_{2\pi}$ des fonctions de carrés intégrables sur $[0, 2\pi]$ à valeurs complexes périodisé sur $\mathbb{R}$ forme un espace de Banach muni de la norme $||f||^2 = \int_0^{2\pi} |f(t)|^2 dt$.

On munit cet espace du produit scalaire $< f|g >= \int_0^{2\pi} f(t)\overline{g(t)}dt$, ce qui en fait un espace de Hilbert.

Théorème 25 (Théorème de Fejer).
- *Soit $f \in C^0_{2\pi}$. Alors $||\sigma_N(f)||_\infty \leq ||f||_\infty \ \forall N \in \mathbb{N}^*$ et $\sigma_N(f)$ converge uniformément vers f.*
- *Soit $f \in L^p_{2\pi}$, alors pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, $||\sigma_N(f)||_2 \leq ||f||_2$ et $\sigma_N(f)$ converge vers f en norme $||.||_2$.*

Corollaire 26. *On note $e_n : t \mapsto e^{int}$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$. Alors la famille $(e_n)_n$ est une base hilbertienne de $L^2_{2\pi}$*

Corollaire 27 (Conséquences).
- *Soit $f \in L^2_{2\pi}$, alors $f \overset{L^2_{2\pi}}{=} \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(f)e_n$ où l'égalité est au sens de la convergence $L^2_{2\pi}$.*
- *On a de plus l'égalité de Parseval : $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(t)|^2 dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n(f)|^2$*
- *L'application*

$$\begin{aligned} \gamma: \ & L^2_{2\pi} \to l^2 \\ & f \mapsto (e_n(f))_n \end{aligned} \tag{1}$$

est une isométrie bijective

Application 28.
- *Soit g la fonction 2π-périodique définie par g(x)=1 si $0 \leq x < \frac{\pi}{2}$, $g(\frac{\pi}{2})$=0 et $g(x) = -1$ si $\frac{\pi}{2} < x \leq \pi$. L'égalité de Parseval donne $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$.*
- *Soit j la fonction 2π-périodique définie par $j(x) = |x|$ sur $[-\pi, \pi]$. L'égalité de Parseval donne alors $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^4} = \frac{\pi^4}{96}$*

3 Densité dans les espaces hilbertiens

3.1 Un critère de densité

Théorème 29 (Projection sur un convexe fermé). *Soit C un partie convexe et fermé non-vide de H espace de Hilbert. Alors pour tout $x \in H$, il existe un unique $y = P_C(x)$ tel que : $dist(x, C) = ||x - y||$. On dit que $y = P_C(x)$ est la projection de x sur C. On à la caractérisation suivante pour y dans H :*

$$y = P_C(x) \iff < x - y, z - y > \leq 0 \quad \forall z \in C$$

(dans le cas réel)
Voir dessin en annexe

Corollaire 30. *Si F est un sev fermé de H, on a :*

$$y = P_C(x) \iff < x - y, z >= 0 \quad \forall z \in F$$

Corollaire 31. *Si F est un sev de H, on a : $H = \overline{F} \oplus F^\perp$. En particulier, F est dense dans $H \iff F^\perp = \{0\}$*

3.2 Les espaces $L^2(I, \rho)$ à poids

Définition 32. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. On dit que ρ est une fonction poid si elle est définie et mesurable sur I, telle que

$$\int_I |x|^n \rho d\lambda$$

soit finie pour tout entier naturel n. On note $L^2(I, \rho)$ l'ensemble des fonctions de carrés intégrables pour cette mesure, quotienté par l'égalité preque-partout. $L^2(I, \rho)$ **est un espace de Hilbert**.

Proposition 33. *La famille des monomes $(x \mapsto x^n)_n$ fournit une famille libre de $L^2(I, \rho)$. Le procédé d'orthogonalisation permet de fournir une famille libre de polynômes orthogonaux : $(P_n)_n$, où P_n est de degré n.*

Théorème 34 (Base hilbertienne des polynômes orthogonaux). *On suppose qu'il existe α positif tel que*

$$\int_I e^{\alpha|x|} \rho d\lambda$$

soit finie. Alors la famille des polynômes orthogonaux associées à ρ est une base hilbertienne de $L^2(I, \rho)$.

Exemple 35. Si $I =]0, +\inf[$, $\rho(x) = x^{-ln(x)}$. En considérant la fonction $f(x) = sin(2\pi ln(x))$, on montre que la famille des polynômes orthogonaux associée à ρ n'est pas une base hilbertienne.

Application 36. *Pour* $I =]-1,1[$ *et* $\rho(x) = 1$*, on trouve les polynômes de Legendre. On montre que* $p_n(x) = \frac{n!}{(2n)!}(\frac{d}{dx})^n(x^2-1)^n$ *forment une base hilbertienne de* $L^2(]-1,1[,\rho)$ *à normalisation près*

Application 37. *Pour* $I = \mathbb{R}$ *et* $\rho(x) = e^{-x^2}$*, on trouve les polynômes de Hermite. On montre que* $p_n(x) = (-1)^n 2^{-n} e^{x^2}(\frac{d}{dx})^n e^{-x^2}$ *forment une base hilbertienne de* $L^2(\mathbb{R},\rho)$ *à normalisation près*