201 – Espaces de fonctions. Exemples et applications

1 Les fonctions $C^0([a,b])$

1.1 Autour de la convergence uniforme

Définition 1. On dit qu'une suite de fonction $(f_n)_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ converge uniformément vers $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ si $||f_n - f||_\infty \underset{n\to+\infty}{\to} 0$.

Contre-exemple 2. La suite de fonction définie par $x \mapsto x^n$ sur $[0,1]$ converge simplement mais pas uniformément.

Théorème 3. *Une fonction dans $C^0([a,b])$ est bornée et atteint ses bornes.*

Théorème 4. *Si $(f_n)_n \in C^0([a,b])^{\mathbb{N}}$ converge uniformément vers $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, alors $f \in C^0([a,b])$*

Corollaire 5. *L'espace $C^0([a,b])$ muni de la norme uniforme est un fermé.*

Théorème 6. *L'espace $C^0([a,b]), ||.||_\infty$ est un espace de Banach*

1.2 Approximation de fonctions sur un compact

Théorème 7 (de Weierstrass). *L'ensemble des polynômes sur $[a,b]$ est dense dans $C^0[a,b]$*

Théorème 8 (Heine). *Soit $f \in C^0([a,b])$, alors f est uniformément continue sur $[a,b]$*

Corollaire 9. *Les fonctions en escalier sont denses dans $C^0([a,b])$*

Théorème 10 (Dini).
- *Une suite croissante de fonctions continues sur [a,b] qui converge simplement vers $f \in C^0([a,b])$ converge uniformément vers f.*
- *Une suite de fonctions croissantes qui converge simplement vers $f \in C^0([a,b])$ converge uniformément vers f.*

Application 11. *On donne une suite de polynôme qui converge uniformément vers $t \mapsto \sqrt{t}$ sur $[0,1]$*

1.3 Un critère de compacité

Définition 12. Une famille de fonctions $Y \in C^0([a,b])$ est dite équicontinue si $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall f \in Y, |x-y| < \eta \implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon$

Théorème 13 (Ascoli). *Soit une famille de fonctions $Y \in C^0([a,b])$, alors on à l'équivalence : Y est équicontinue et bornée pour la norme uniforme $\iff \overline{Y}$ est compacte.*

Remarque 14. Le théorème d'Ascoli s'applique de la manière suivante aux suites de fonctions : Soit $(f_n)_n \in C^0([a,b])^{\mathbb{N}}$ une suite de fonctions équicontinues telle qu'il existe $M > 0$ tel que pour tout n et x : $|f(x)| < M$. Alors on peut extraire une sous-suite $(f_{n_k})_k$ qui converge uniformément vers f sur $[a,b]$

Application 15. *On applique le théorème d'Ascoli à un opérateur d'intégration : REF ?*

2 Espaces $L^p(\Omega, A, \mu)$

2.1 Propriétés des espaces L^p

Cadre : Soit (Ω, A, μ) un espace mesuré.

Définition 16. Soit $1 \leq p < \infty$. On définit $||f||_p = (\int_\Omega |f|d\mu)^{\frac{1}{p}}$ et $||f||_inf = \sup\{M > 0 \mid |f(x)| \leq M\mu - p.p\}$
On introduit $L^p(\Omega, A, \mu) = \{f$à valeurs réelles et mesurable sur Ω telle que$||f||_p < \infty$ quotienter par la relation d'équivalence d'égalité $\mu - p.p\}$

Proposition 17 (Inégalité de Hölder et de Minkowski). *Soient f, g deux fonctions mesurables à valeurs dans $[0, +\infty]$. q l'exposant conjugué de p.*
- $||fg||_1 \leq ||f||_p ||g||_q$
- $||f+g||^p \leq ||f||_p + ||g||_p$

Corollaire 18. *$(L^p(\Omega, A, \mu), ||.||_p)$ est un espace vectoriel normé sur $\mathbb{R}$.*

Théorème 19 (Riesz-Fisher). *Pour tout p, $(L^p(\Omega, A, \mu), ||.||_p)$ est un espace de Banach.*

Corollaire 20. *Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions L^p qui converge dans $(L^p(\Omega, A, \mu), ||.||_p)$ vers f. Alors il existe une sous-suite de $(f_n)_n$ qui converge vers f μ-p.p.*

2.2 Partie dense dans $(L^p(\Omega, A, \mu), ||.||_p)$[BP]

Proposition 21. *Les fonctions étagées intégrables sont denses dans $(L^p(\Omega, A, \mu), ||.||_p)$. $(p \neq \infty)$*

Proposition 22. *Les fonctions C_C^0 sont denses dans $(L^p(\Omega, A, \mu), ||.||_p)$, $(p \neq \infty)$*

Application 23. *L'opérateur de translation $\tau_t : (xf(x)) \mapsto (x \mapsto f(x+t))$ est un opérateur continue sur $(L^p(\Omega, A, \mu), ||.||_p)$.*

Théorème 24. *Les fonctions $C_C^\infty(\Omega)$ sont denses dans $(L^p(\Omega, A, \mu), ||.||_p)$ $(p \neq \infty)$*

Application 25 (Lemme de Riemmann-Lebesgue)**.** *Soit $f \in (L^1(\mathbb{R}, B(\mathbb{R}), \lambda), ||.||_p)$, alors $\int_{\mathbb{R}} f(t)e^{itx}dt \underset{x \to \pm\infty}{\to} 0$*

3 Les espaces hilbertiens L^2

3.1 L'espace $L^2_{2\pi}$ des fonctions 2π-périodique

Définition 26. L'espace $L^2_{2\pi}$ des fonctions de carrés intégrables sur $[0, 2\pi]$ à valeurs complexes périodisé sur $\mathbb{R}$ forme un espace de Banach muni de la norme $||f||^2 = \int_0^{2\pi} |f(t)|^2 dt$.

On munit cet espace du produit scalaire $< f|g >= \int_0^{2\pi} f(t)\overline{g(t)}dt$, ce qui en fait un espace de Hilbert.

Théorème 27 (**De Fejer**)**.** *Soit $f \in L^2_{2\pi}$. Alors $||\sigma_N(f)||_p \leq ||f||_p$ et $||\sigma_N(f) - f||_p \underset{N \to +\infty}{\to} 0$, où $\sigma_N(f) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} S_k(f)$, avec $S_n(f)$ la somme partielle de fourier d'indice n.*

Corollaire 28. *On note $e_n : t \mapsto e^{int}$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$. Alors la famille $(e_n)_n$ est une base hilbertienne de $L^2_{2\pi}$*

Corollaire 29 (**Conséquences**)**.**

- *Soit $f \in L^2_{2\pi}$, alors $f \overset{L^2_{2\pi}}{=} \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(f)e_n$ où l'égalité est au sens de la convergence $L^2_{2\pi}$.*
- *On a de plus l'égalité de Parseval : $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(t)|^2 dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n(f)|^2$*
- *L'application*

$$\begin{aligned} \gamma : \quad & L^2_{2\pi} \to l^2 \\ & f \mapsto (e_n(f))_n \end{aligned} \tag{1}$$

est une isométrie bijective

Application 30.

- *Soit g la fonction 2π-périodique définie par $g(x)$=1 si $0 \leq x < \frac{\pi}{2}$, $g(\frac{\pi}{2})$=0 et $g(x) = -1$ si $\frac{\pi}{2} < x \leq \pi$. L'égalité de Parseval donne $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$.*
- *Soit j la fonction 2π-périodique définie par $j(x) = |x|$ sur $[-\pi, \pi]$. L'égalité de Parseval donne alors $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^4} = \frac{\pi^4}{96}$*

3.2 Les espaces $L^2(I, \rho)$ à poids

Définition 31. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. On dit que ρ est une fonction poid si elle est définie et mesurable sur I, telle que

$$\int_I |x|^n \rho d\lambda$$

soit finie pour tout entier naturel n. On note $L^2(I, \rho)$ l'ensemble des fonctions de carrés intégrables pour cette mesure, quotienté par l'égalité preque-partout. $L^2(I, \rho)$ **est un espace de Hilbert**.

Proposition 32. *La famille des monomes $(x \mapsto x^n)_n$ fournit une famille libre de $L^2(I, \rho)$. Le procédé d'orthogonalisation permet de fournir une famille libre de polynômes orthogonaux : $(P_n)_n$, où P_n est de degré n.*

Théorème 33 (**Base hilbertienne des polynômes orthogonaux**)**.** *On suppose qu'il existe α positif tel que*

$$\int_I e^{\alpha|x|}\rho d\lambda$$

soit finie. Alors la famille des polynômes orthogonaux associées à ρ est une base hilbertienne de $L^2(I, \rho)$.

Exemple 34. Si $I =]0, +\inf[$, $\rho(x) = x^{-ln(x)}$. En considérant la fonction $f(x) = sin(2\pi ln(x))$, on montre que la famille des polynômes orthogonaux associée à ρ n'est pas une base hilbertienne.

Application 35. *Pour $I =]-1, 1[$ et $\rho(x) = 1$, on trouve les polynômes de Legendre. On montre que $p_n(x) = \frac{n!}{(2n)!}(\frac{d}{dx})^n(x^2-1)^n$ forment une base hilbertienne de $L^2(]-1, 1[, \rho)$ à normalisation près*

Application 36. *Pour* $I = \mathbb{R}$ *et* $\rho(x) = e^{-x^2}$, *on trouve les polynômes de Hermite. On montre que* $p_n(x) = (-1)^n 2^{-n} e^{x^2} (\frac{d}{dx})^n e^{-x^2}$ *forment une base hilbertienne de* $L^2(\mathbb{R}, \rho)$ *à normalisation près*