# 170 – Formes quadratiques sur un espace vectoriel de dimension finie. Orthogonalité, isotropie. Applications.

Référence : Gourdon Algèbre, Rombaldi, Grifone pour les exemples, H2G2 pour O(p,q)

Dans toute la leçon, E est un $\mathbb{K}$-e.v de dimension finie n, avec $\mathbb{K}$ un corps commutatif de caractéristique diférente de 2.

## 1 Généralités sur les formes quadratiques

### 1.1 Formes quadratiques et forme polaire

**Définition 1.** — On appelle forme quadratique sur E toute application q de E dans $\mathbb{K}$ de la forme $q : x \mapsto \varphi(x, x)$ avec $\varphi$ une forme bilinéaire symétrique sur E.

**Théorème 2.** — *Soit q une forme quadratique sur E. Alors il existe une unique forme bilinéaire symétrique $\varphi$ tel que $q(x) = \varphi(x, x)$, il s'agit de $\varphi : (x, y) \mapsto \frac{1}{2}(q(x + y) - q(y) - q(x)) = \frac{1}{4}(q(x + y) - q(x - y))$*

**Exemple 3.** — $E = \mathbb{R}^3$, $q : u = (x, y, z) \mapsto 3x^2 + y^2 + 2xy - 3xz$ est une forme quadratique.

— $E = \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$, $q : A \mapsto tr(^tAA)$ est une forme quadratique

— $E = \mathbb{R}^4$, $q : u = (x, y, z, t) \mapsto x^2 + y^2 + z^2 - t^2$ est une forme quadratique, il s'agit de la forme quadratique de Lorentz lié à la théorie de la relativité.

### 1.2 Matrice d'une forme quadratique

**Proposition 4.** *Soit q une forme quadratique et $\varphi$ sa forme polaire. Alors avec $B = (e_1, ..., e_n)$ base de E, on note $M = ((\varphi(e_i, e_y)) \in S_n(\mathbb{K})$ appelée matrice de $\varphi$ (et donc de q) dans la base B. Alors pour tout $(x, y) \in E^2$, en notant $X, Y$ les vecteurs des coordoonées de x et y dans B, on à : $\varphi(x, y) =^t XMY$ et $q(x) =^t XMX$.*

**Exemple 5.** On reprend les trois exemples précédents et on donne leur matrice dans les bases canoniques.

**Exemple 6.** Soit f une fonction de U ouvert de $\mathbb{R}^n$ vers $\mathbb{R}$, de classe $C^2$. Alors la différentielle seconde de f $D^2f(a)$ en un point a de U est une forme quadratique de $\mathbb{R}^n$. Sa matrice dans la bas canonique est appellée Hessienne de f au point a.

**Proposition 7.** *L'application qui a une forme quadratique associe sa matrice est un isomorphisme entre l'ensemble des formes quadratiques vers $S_n(\mathbb{K})$. Il est donc de dimension $\frac{n(n+1)}{2}$.*

**Proposition 8.** *Soit B et B' deux bases de E, P la matrice de passage de B à B'. Alors en notant M' et M les matrices de q dans B et B', on à la relation suivante : $M' =^t PMP$. On dit que M et M' sont congrues. Ainsi M et M' ont même rang. On appelle rang de q le rang de sa matrice dans n'importe quelle base de E.*

**Exemple 9.** On donne le rang des trois formes quadratiques définies précédemment.

## 2 Orthogonalité

### 2.1 Cône isotrope et noyau d'une forme quadratique

**Définition 10.** On appelle cône isotrope de q forme quadratique sur E l'espace $C_q = \{x \in E | q(x) = 0\}$. q est dit définie si son cône est réduit à 0.

**Exemple 11 (Gri).** — Soit $E = \mathbb{R}^2$ et $q : x \mapsto x_1^2 - x_2^2$. Alors $C_q = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 = \pm x_2$.

— Soit $E = \mathbb{R}^3$ et $q : x \mapsto x_1^2 + x_2^2 - x_3^2$. Alors $C_q = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_3 = \pm\sqrt{x_1^2 + x_2^2}$. + DESSIN

**Définition 12.** — Deux vecteurs x et y de E sont dits orthogonaux si $\varphi(x, y) = 0$

— Soit $A \subset E$, $A^\perp = \{y \in E | \forall x \in A,\ \varphi(x, y) = 0\}$.

— On définit le noyau de q comme ker($q$)=$E^\perp = \{y \in E | \forall x \in E,\ \varphi(x, y) = 0\}$. q est dite non-dégénérée si $\ker q = \{0\}$

**Proposition 13.** *On à $\ker q \subset C_q$. En particulier, si q est définie, alors q est non-dégénérée.*

**Remarque 14.** La réciproque est fausse : La forme quadratique de forme polaire $\varphi : (x, y) \mapsto x^2 - y^2$ est non-dégénérée mais définie.

**Proposition 15.** — *Si $F \subset E$, $F \subset F^{\perp\perp}$*

— *Si $A \subset B \subset E$, $B^\perp \subset A^\perp$*

**Théorème 16.** *Le noyaux de q (forme quad ou hermtienne) est le même que celui de sa matrice dans n'importe quelle base.*

**Exemple 17.** On précise si les formes quadratiques précédentes sont dégénérées à l'aide de leurs matrices.

**Théorème 18.** — $\dim(F) + \dim(F^{\perp}) = \dim(E) + \dim(F \cap \ker(q)$

— *$F^{\perp\perp} = F + \ker(q)$*

— *Si la restriction de $q|_F$ est définie, on à $F \bigoplus F^{\perp} = E$*

— *Si $q$ est définie, on à $F = F^{\perp\perp}$*

**Définition 19.** On dit qu'une forme quadratique est positive (respectivement négative) si $q(x)$ est positif ou nul (resp négatif ou nul) pour tout x dans E.

**Proposition 20.** *$q$ est définie positive $\iff$ il existe une base $B$ de $E$ tel que sa matrice associée est définie positive $\iff$ il existe une base $B$ de $E$ tel que tout les mineurs principaux de $[q]_B$ soient positifs.*

**Application 21** (Recherche d'extremums)**.** *Soit $f$ une fonction de $U$ ouvert de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ de classe $C^2$. On suppose que $D(f)(a) = 0$, si bien que $f(a+h) = f(a) + \frac{Q(h)}{2} + o(||h||^2)$ quand $h$ tend vers 0, avec $Q(h)$ une forme quadratique.*

— *$f$ admet un minumum (resp. maximum) relatif en $a \implies Q$ est positive (resp. négative)*

— *$Q$ est définie positive (resp. négative) $\implies f$ admet un minimum (resp. maximum) relatif en a.*

*+ Contre-exemple de la réciproque avec $x \mapsto x^3$ en 0 avec un DESSIN*

**Proposition 22 (Inégalité de Cauchy-Schwarz).** *Soit $q$ une forme quadratique positive. On à : $\forall (x,y) \in E^2$, $|\varphi(x,y)|^2 \leq q(x)q(y)$*

**Corollaire 23.** *Si $q$ est positive, alors $C_q = \ker(q)$.*

## 2.2 Base orthogonal et réduction de Gauss

**Définition 24.** Soit B=$(e_1, ..., e_n)$ une base de E. On dit que B est une base q-orthogonal pour la forme quadratique q si $\varphi(e_i, e_j) = \delta_{i,j}$. La matrice de q dans une telle base est donc diagonale.

**Théorème 25.** *Soit $q$ une forme quadratique. Alors il existe une base q-orthogonal. Si on note $(e_1, ..., e_n)$ une base q-orthogonal.*

**Corollaire 26.** *Soit $A$ une matrice de $\mathbb{M}_n(\mathbb{K})$ tel que $A^* = A$. Alors il existe $P \in \mathbb{G}l_n(\mathbb{K})$ telle que $P^*AP$ soit une matrice diagonale.*

**Remarque 27.** Il ne faut pas confondre ce théorème avec le théorème spectrale (valable uniquement si $\mathbb{K}$=C ou R Cependant, le théorème spectrale permet d'obtenir des résultats plus fins si l'on ce munit d'un espace E euclidien :

**Proposition 28.** — *Soit $q$ une forme quadratique sur (E,$< .|. >$) euclidien, alors il existe une base $B$ orthogonale pour $q$ et orthonormale pour $< .|. >$.*

— *Soit $M$ et $N$ deux matrices symétriques, avec $M$ définie positive. Alors il existe $P \in \mathbb{G}l_n(\mathbb{R})$ tel que ${}^tPMP = I_n$ et ${}^tPNP = D$ avec $D$ une matrice diagonale.*

**Théorème 29 (Réduction de Gauss).** *Soit $q$ une forme quadratique. Alors il existe des coefficients $(\lambda_1, ..., \lambda_n)$ et $n$ formes linéaires indépendantes $(l_1, ..., l_n)$ tel que $q(x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i (l_i(x))^2$.*

**Corollaire 30.** *Soit $q$ une forme quadratique. Alors, avec les notations du théorème précédent, il existe une base $B$ de $E$ tel que la matrice de $q$ dans $B$ est de la forme $diag(\lambda_1, ..., \lambda_n)$.*

**Exemple 31.** On donne la réduction de Gauss de formes quadratiques simples. (1er Exo Gourdon)

## 2.3 Groupe orthogonal associé à une forme quadratique (REF = Griffone)

**Définition 32.** Soit E un $\mathbb{K}$-e.v de dimension finie et q une forme quadratique sur E, q non-dégénérée. Un endomorphisme f de E est dit orthogonal relativement à q si $q \circ f = q$. On note $O(q)$ l'ensemble de ces endomorphismes.

**Proposition 33.** *Avec les mêmes notations, on à : $f \in O(q) \iff \varphi(f(x), f(y)) = \varphi(x,y) \forall (x,y) \in \mathbb{E}^2 \iff {}^tASA = S$, avec $\varphi$ la forme polaire de $q$, $A$ la matrice de $f$ dans une base $B$ et $S$ la matrice de $q$ dans $B$.*

**Proposition 34.** *Si $f \in O(q)$, alors est inversible ($det(f) = \pm 1$) et $f^{-1} \in \mathbb{O}(q)$. De plus, l'ensemble $O(q)$ est un sous-groupe de $\mathbb{G}l_n(\mathbb{K})$ muni de la loi de composition, appelé groupe orthogonal de $q$.*

**Définition 35.** On note $O(p,q)$ le sous-groupe de $\mathbb{G}l_n(\mathbb{R})$ formé des isométries de la forme quadratique réelle sur $\mathbb{R}^{p+q}$ dont la matrice dans la base canonique est : $\begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & -I_q \end{pmatrix}$. Par exemple, le sous-groupe $O(1,3)$ est appelé sous-groupe de Lorentz.

**Théorème 36.** *On a un isomorphisme tel que : $O(p,q) \simeq O_n \times O_n \times \mathbb{R}^{pq}$*

# 3 Classification des formes quadratiques

## 3.1 Classification

**Définition 37.** Deux formes quadratiques q et q' sur E sont dits équivalentes si il existe un endomorphisme u tel que $q \circ u = q'$.

**Corollaire 38.** *Deux formes quadratiques sont équivalentes $\iff$ leurs matrices associés sont dans la même classe de congruence.*

**Théorème 39** **(Classification des formes quadratiques sur un e.v complexe).** *Soit E un $\mathbb{C}$-e.v de dim n et q une forme quadratique sur E. Il existe alors une base B=$(e_1,...,e_n)$ tel que pour tout $x=\sum_{i=1}^n x_ie_i \in E$, on a $q(x)=x_1^2+...+x_r^2$ avec r=rg(q). Dans cette base, la matrice de q est $\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Donc deux formes quadratiques sont équivalentes $\iff$ elles ont le mêmes rangs.*

**Corollaire 40.** *Dans l'espace vectoriel des formes quadratique sur E un $\mathbb{C}$-e.v de dimension n, il y a n classes d'équivalences.*

## 3.2 Signature d'une forme quadratique réelle

**Théorème 41** **(Sylvester).** *[Gri] Soit q une forme quadratique sur réelle sur E. Il existe une base B=$(e_1,...,e_n)$ de E tel que la matrice de q dans B soit de la forme : $\begin{pmatrix} I_p & 0 & 0 \\ 0 & -I_{r-p} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ où r=rang(q).On à pour $x=\sum_{i=1}^n x_ie_i$, $q(x)=x_1^2+...+x_s^2-x_{s+1}^2-...-x_r$. L'entier naturel p est indépendant de la base et ne dépend que de q. Le couple (p,r-p) est appelé signature de q. Donc deux formes quadratiques sont équivalentes $\iff$ elles ont la même signature.*

**Exemple 42.**
- On donne la signature des formes quadratiques de l'exemple sur la réduction de Gauss
- $E=\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$, $q : A \mapsto tr({}^tAA)$ est une forme quadratique de signature $(n^2, 0)$

**Théorème 43.** *En désigant par P (resp. N) l'ensemble des espaces vectoriels F de E tels que la restriction de q à F soit définie-positive (resp. définie négative), la signature de q est donnée par : $= \begin{cases} 0 \ si \ P=\emptyset \\ \max\limits_{F\in P}\dim(F) \quad sinon. \end{cases}$ et $\ddot{=} \begin{cases} 0 si N=\emptyset \\ \max\limits_{F\in N}\dim(F) \quad sinon \end{cases}$* ▷

## 3.3 Réduction sur un corps fini

Cadre : Soit E un $\mathbb{F}_q$ espace vectoriel de dimension finie, avec $F_q$ un corps à q éléments de caractéristique différente de 2.

**Proposition 44.** *Il y a $\frac{q+1}{2}$ carrés dans $\mathbb{F}_q$ et autant de non-carrés.*

**Lemme 45.** *Soient a, b dans $\mathbb{F}_q^*$, alors l'équation en x et y : $ax^2+by^2=1$ admet des solutions dans $\mathbb{F}_q$*

**Théorème 46** **(Réduction des formes quadratiques sur un corps finis).** *Soit q une forme quadratique sur E, de rang r et $\alpha$ un non-carré de $\mathbb{F}_q^*$ fixé. Alors il existe une base B tel que la matrice de q dans cette base soit de la forme : $\begin{pmatrix} I_{r-1} & 0 & 0 \\ 0 & \delta & 0 \\ 0 & 0 & O_{n-r} \end{pmatrix}$ avec $\delta \in \{1, \alpha\}$.*

**Corollaire 47.**
- *Soit q et q' deux formes quadratiques non-dégénérées. Alors q et q' sont équivalentes $\iff$ pour toute base B de E, $\frac{discr_B(q')}{discr_B(q)}$ soit un carré de $\mathbb{F}_q$.*
- *Dans l'espace vectoriel des formes quadratiques, il y a 2n+1 classes d'équivalences différentes.*