158 — Matrices symétriques réelles, matrices hermitiennes.

Références : Gourdon Algèbre, Rombaldi, H2G2 Tome 1, Mansuy, Grifone, *Analyse Numérique Matricielle* Grégoire Allaire

Cadre : On se place dans $\mathbb{R}$ où $\mathbb{C}$, n est un entier naturel non-nul.

1 Matrice symétrique et Hermitienne

1.1 Définitions

Définition 1. Soit $M \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$, elle est dit symétrique si ${}^tM = M$. On note $S_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques.
Soit $M \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$, elle est dit hermitienne si ${}^*M = M$. (transconjuguée). On note $S_n(\mathbb{C})$ l'ensemble des matrices hermitienne.

Exemple 2. $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 5 & 1+i \\ 1-i & 1 \end{pmatrix}$

Théorème 3. *$S_n(\mathbb{R})$ et $S_n(\mathbb{C})$ sont des sous-espaces vectoriels de $M \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ et $M \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$, de dimension $\dfrac{n(n+1)}{2}$.
On à de plus les décompositions suivantes : $M \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R}) = S_n(\mathbb{R}) \bigoplus A_n(\mathbb{R})$ (et $M \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C}) = S_n(\mathbb{C}) \bigoplus A_n(\mathbb{C})$), où $A_n(\mathbb{R})$ est l'ensemble des matrices M anti-symétriques telles que ${}^tM = -M$.*

Définition 4. Une matrice $M \in S_n(\mathbb{R})$ (resp. $S_n(\mathbb{C})$) est dit positive si $\forall X \in \mathbb{R}^n$, ${}^tXMX \geq 0$ (resp. $\forall X \in \mathbb{C}^n$, ${}^*XMX \geq 0$). On note leur ensemble $S_n^+(\mathbb{K})$
Elle est dite définie-positive si l'inégalité est stricte pour tout vecteur X non-nul. On note leur ensemble $S_n^{++}(\mathbb{K})$

1.2 Lien avec les formes bilinéaires et les formes quadratique

Cadre : Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n.

Définition 5.
- On appelle forme quadratique sur E toute application q de E dans $\mathbb{K}$ de la forme $q : x \mapsto \varphi(x,x)$ avec φ une forme bilinéaire symétrique sur E.
- Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, on appelle forme hermitienne sur E toute application h de E dans $\mathbb{C}$ de la forme $h : x \mapsto \phi(x,x)$ avec ϕ une forme sesquilinéaire à symétrie hermitienne sur E.

Exemple 6.
- $E = \mathbb{R}^3$, $q : u = (x,y,z) \mapsto 3x^2 + y^2 + 2xy - 3xz$ est une forme quadratique.
- $E = \mathbb{C}^2$, $h : u(x,y) \mapsto \bar{x}x - 2y\bar{y} + \frac{3}{2}\bar{y}x + \frac{3}{2}y\bar{x}$ est une forme hermitienne

Proposition 7. *Soit q une forme quadratique (resp. hermitienne) et φ sa forme polaire. Alors avec $B = (e_1, ..., e_n)$ base de E, on note $[q]_B = ((\varphi(e_i, e_y)) \in S_n(\mathbb{K})$ appelée matrice de φ (et donc de q) dans la base B. Alors pour tout $(x,y) \in E^2$, en notant X, Y les vecteurs des coordoonées de x et y dans B, on à : $\varphi(x,y) = ^t XMY$ et $q(x) = ^t XMX$ (resp. $\varphi(x,y) = ^* XMY$ et $q(x) = ^* XMX$).*

Théorème 8. *L'ensemble des formes quadratiques (resp. hermitienne) est un espace vectoriel de dimension $\dfrac{n(n+1)}{2}$.*

Exemple 9. On reprend les exemples précédents dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{C}^2$
- $\begin{pmatrix} 3 & 1 & -\frac{3}{2} \\ 1 & 1 & 0 \\ -\frac{3}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix}$
- $\begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} & -2 \end{pmatrix}$

Proposition 10. *Soit B et B' deux bases de E, P la matrice de passage de B à B'. Alors $[q]_{B'} =^* P[q]_B P$. On dit que $[q]_{B'}$ et $[q]_B$ sont congrues. (Dans $\mathbb{K}$) On peut ainsi définit le rang de q comme le rang de sa matrice dans n'importe quelle base.*

Définition 11. On appelle noyau de q l'ensemble $\ker(q) = \{x \in E \mid \forall y \in E, |\varphi(x,y) = 0\}$.

Proposition 12. *Le noyau de q est le même que celui de sa matrice dans n'importe quelle base.*

Définition 13. Une forme quadratique (resp. hermitienne) est dit positive (resp. définie-positive) si $\forall x \in E, |q(x) \geq 0$ ($\forall x \in E^*, |q(x) > 0$).

Proposition 14. *Une forme quadratique/hermitienne) est positive (définie positive) $\iff$ pour toute base B de E, $[q]_B$ est positive (définie positive).*

1.3 Lien avec l'algèbre linéaire : Espace euclidiens et hermitiens

On considère E un espace euclidien (resp. hermitien) muni du produit scalaire (resp. hermitien) $< .|. >$

Définition 15. Soit $f, g \in \mathcal{L}(E)$. On dit qu'ils sont adjoints si $\forall (x,y) \in E^2$, $< f(x)|y >=< x|g(y) >$. On note $g =^* f$ l'adjoint de f, il existe toujours en dimension finie. Un endomorphisme est dit auto-adjoint si ${}^*f = f$.

Proposition 16. *f est autoadjoint $\iff$ sa matrice $[f]_{\mathcal{B}}$ dans une base orthonormée $\mathcal{B}$ est symétrique (si E est euclidien) (et hermitienne si E est hermitien)*

Proposition 17. *Si f est autoadjoint, alors ses valeurs propres sont positives.*

2 Réductions et classifications des matrices symétriques et hermitiennes

2.1 Réduction selon la relation de congruence

Théorème 18. *Soit q une forme quadratique (resp. Hermitienne) sur E un $\mathbb{K}$-ev. Alors il existe une base q-$\perp$. (i.e tel que $\varphi(e_i, e_j) = \delta_{i,j}$)*

Corollaire 19. *Soit $M \in \S_n(\mathbb{K})$, alors il existe $P \in GL_n(\mathbb{K})$ telle que ${}^*PMP$ est diagonale.*

Théorème 20 (Sylvester). *Soit $M \in S_n(\mathbb{R})$, de rang r. Alors il existe $(p,q) \in \mathbb{N}^2$ tel que $p+q=r$ et une matrice $P \in GL_n(\mathbb{R})$ tel que*

$$ {}^tPMP = \begin{pmatrix} I_p & 0 & 0 \\ 0 & I_q & 0 \\ 0 & 0 & O_{n-r} \end{pmatrix} $$

Remarque 21. Si M est la matrice d'une forme quadratique Q, alors (p,q) s'appelle signature de Q, et ce couple est unique. Il est caractérisé par la propriété suivante : pour toute base $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_n)$ $Q-\perp$, p est le nombre de vecteurs e_i tel que $Q(e_i) > 0$, q est le nombre de vecteurs e_i tel que $Q(e_i) < 0$.

Application 22. *Pour une matrice réelle symétrique de rang plein, il y a $n+1$ classes d'équivalences pour la relation de congruence.*

Théorème 23 (Cas complexe). *Soit $M \in S_n(\mathbb{C})$, de rang r. Alors il existe une matrice $P \in GL_n(\mathbb{C})$ tel que*

$$ {}^tPMP = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & O_{n-r} \end{pmatrix} $$

2.2 Réduction selon la relation de similitude

Théorème 24 (Théorème Spectral). *Soit $M \in S_n(\mathbb{K})$, alors il existe $P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{K})$ tel que ${}^*PMP$ est diagonale réelle.*

Remarque 25. A ne pas confondre avec le corollaire 19. Ici, on a réduit pour la relation de congruence ET de similitude !

Proposition 26. *Soit $M \in S_n(\mathbb{K})$. $M \in S_n^{++}(\mathbb{K}) \iff$ les valeurs propres de M sont strictement positives.*

Application 27. *Soit $M \in S_n(\mathbb{K})$, $||M||_2 = \rho(M)$.*

Application 28 (Décomposition Polaire)**.** *L'application* $\begin{array}{lll} \mu : & \mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \times S_n^{++}(\mathbb{R}) & \to GL_n(\\ & (O,S) & \mapsto OS \end{array}$ *est un homéomorphisme.*

Application 29. *Soit $M \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$, alors $||M||_2 = \sqrt{(\rho({}^tMM))}$*

Théorème 30. *: $S_n(\mathbb{R}) \longrightarrow S_n^{++}(\mathbb{R})$ est un homéomorphisme.*

Théorème 31 (Réduction simultanée). *Soient M, N deux matrices symétriques (resp. hermitienne) telles que M soit définie-positive. Alors il existe $C \in GL_n(\mathbb{K})$ telle que ${}^*CMC = I_n$ et ${}^*CNC = D$ matrice diagonale réelle.*

Théorème 32 (Co-réduction). *Soit M, N deux matrices hermitiennes qui commutent. Alors il existe $P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{C})$ tel que ${}^*PMP$ et ${}^*PNP$ soient diagonales réelles.*

3 Application en analyse et en numérique

3.1 Calcul différentiel et optmisation

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$

Définition 33. Soit $f : \Omega \to \mathbb{R}$ de classe C^2. Alors pour tout $x \in \Omega$, la hessienne de f au point x, noté $D^2f(x)$ est une matrice symétrique réelle.

Proposition 34. *Soit $f : U \to \mathbb{R}$ et $a \in U$.*

- *Si f admet en a un minimum local et si $D^2f(a)$ existe, alors nécéssairement $Df(a) = 0$ et $D^2f(a)$ est une matrice symétrique **positive**. (négative si maximum)*
- *Si $Df(a) = 0$ et $D^2f(a)$ est une matrice symétrique **définie-positive**, alors f admet un minimum local relatif stricte en a. (maximum si définie-négative).*

Application 35 (notation de monge)**.** *Soit $f : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe C^2 sur U. On note $D^2(f)(a) = \begin{pmatrix} r & s \\ s & t \end{pmatrix}$ Alors :*

- *Si $\det(A) = rt - s^2 > 0$ et $r > 0$, f admet un minimum relatif.*
- *Si $rt - s^2 > 0$ et $r < 0$, f admet un maximum relatif.*
- *Si $rt - s^2 > 0$, f n'a pas d'extremum en a (point-col)*
- *Si $rt - s^2 = 0$, on ne peut pas conclure.*

— *Les dessins en **annexe** représentent ces situations*

Proposition 36. *Soit U ouvert connexe de $\mathbb{R}^n$. On suppose que f est 2-fois différentiable sur U. On à l'équivalence : f est convexe $\iff$ $\forall x \in U$, $D^2 f(x)$ est une forme quadratique positive.*

Proposition 37. *Soit $f : U \to \mathbb{R}$ deux-fois différentiable. Alors f admet un extrema relatif en a $\iff$ a est un point critique de f et $\forall x \in U$, $D^2 f(x)$ est une matrice symétrique positive.*

Exemple 38. On veut résoudre le système linéaire carré $Ax = b$, avec $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ x est solution du système $\iff$ x est l'unique minimum de la fonctionelle $J(u) = \frac{1}{2} < Au|u > - < b|u >$ sur $\mathbb{R}^n$.
C'est le point de départ de l'algorithme de gradient à pas optimal.

3.2 Analyse numérique matricielle

Théorème 39 (Décomposition LU). *Soit $A \in \mathbb{M}_{n,n}(\mathbb{C})$ dont tout les mineurs sont positifs, alors il existe un couple (L, U) avec L triangulaire inférieure à diagonale unité et U triangulaire supérieure tel que $A = LU$.*

Remarque 40. L'intérêt de cet algorithme est que l'on stocker (L, U) pour inverser facilement la matrice A. Il agit en $O(n^3)$. On peut l'appliquer au matrice symétrique définie positive comme le montre le théorème suivant :

Théorème 41. *Soit $A \in \mathbb{M}_{n,n}(\mathbb{C})$, alors A est symétrique définie positive $\iff$ tout ses mineurs sont strictement positifs.*

Application 42. *$S_n^{++}(\mathbb{C})$ est un ouvert de $\mathbb{M}_n(\mathbb{C})$*

Théorème 43 (Problème des moindres carrés). *On s'intéresse au problème suivant $\min_{x \in \mathbb{R}^p} ||Ax - b||_2$, avec $A \in \mathbb{M}_{n,p}(\mathbb{C})$ et $b \in \mathbb{C}^n$. On cherche ainsi une solution du système linéaire au sens quadratique ! Cela est particulièrement utile pour les systèmes qui n'admettent pas de solution.*

— *Le problème des moindres carrés admet toujours une solution x, et celle-ci vérifie l'équation normale : ${}^tAA =^* Ab$, avec ${}^tAA \in S_n(\mathbb{R})$. Deux solutions distinctes diffèrent d'un élément de $\ker(A)$.*

— *[**Methode de Choleskly**] On s'intéresse à la résolution de $Sx = d$ avec S matrice symétrique de taille n. Il existe une unique matrice réelle B triangulaire inférieure à éléments diagonaux positifs tel que $S = B^t B$*

— *[**Methode de factorisation QR**] On suppose que n=p. On applique la méthode de factorisation QR et on trouve une solution explicite du problème des moindres carrés.*

Remarque 44. Le problème de la régréssion linéaire est un problème de moindres carrés.

Théorème 45 (Méthode de la puissance). *Objectif : trouver la plus grande valeur propre en valeur absolue de A : $|\lambda_1| \leq ... \leq |\lambda_n|$ L'algorithme est le suivant : $x_0 \in \mathbb{R}^n$, avec $||x_0 = 1$ puis $y_k = Ax_{k+1}$ et $x_k = \frac{y_k}{||y_k||}$.*
Si A est symétrique, avec $B = (e_1, ...e_n)$ une base orthonormée de vecteur propre, si la valeur propre λ_n est simple et positive, et si le coefficient devant e_n dans la décomposition dans la base B de x_0 est non-nul, alors la méthode converge : $x_k \underset{k \to +\infty}{\rightarrow} \pm e_n$ et $||y_k|| \underset{k \to +\infty}{\rightarrow} |\lambda_n|$

Remarque 46. En appliquant la méthode à la matrice A^{-1}, on est capable de trouver la plus petite valeur propre en valeur absolue.