154 – Sous-espaces stables par un endomorphisme ou une famille d'endomorphismes d'un espace vectoriel de dimension finie. Applications.

Cadre : Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n. $\mathbb{K}$ un corps commutatif.

1 Sous-espaces stables

1.1 Définitions et premiers exemples

Définition 1. Soit f un endomorphisme de E et F un sous-espace vectoriel de E. F est dit stable par f (ou f-stable) si $f(F) \subset F$. On appelle endomorphisme induit l'endomorphisme de $\mathbb{L}(F)$: $f|_F^F$.

Exemple 2.
— Ker(f) et Im(f) sont stables par f.
— Pour tout polynômes P de $\mathbb{K}[X]$, ker(P(f)) est f-stable

Exemple 3. Tout les sous-espaces F de E sont stables par une homothétie.

Exemple 4. Soit p un projecteur de E (sur Im(p) parallèlement à Ker(p)). F est un sous-espace stable par E si et seulement si F est la somme directe de H et J, avec H sous-espace de Im(p) et J sous-espace de Ker(p).

Proposition 5. *Soit F stable par f et g deux endomorphismes de E. Alors F est stable par f+g et $f \circ g$*

Proposition 6. *Soit g un automorphisme de E et f un endomorphisme de E. Soit F un sev f-stable. Alors g(F) est stable par $g \circ f \circ g^{-1}$*

Remarque 7. Si l'on dispose d'une décomposition de E en somme directe de sous-espaces stables par f, alors l'étude de f revient à l'étude des endormorphismes induits sur chacun des sous-espaces vectoriels. Dans une base B associée à la décomposition : $E = F_1 \oplus ... \oplus F_p$, on à :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f_{F_1}) & & \\ & \ddots & \\ & & \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f_{F_p}) \end{pmatrix}$$

1.2 Stabilité et dualité

Définition 8. Pour A un sev de E, on définit $A^\perp$ l'orthogonal de A. C'est un sev de E^*.

Proposition 9.
— *Si $A_1 \subset A_2 \subset E$, alors $A_2^\perp \subset A_1^\perp \subset E$*
— *$A^\perp = (Vect A)^\perp$*
— *dim(E)=dim(A)+dim($A^\perp$)*

Définition 10. Soit f une application linéaire de E dans F, deux ev de dimensions finies quelconque. On définit l'application transposée par

$$\begin{aligned} {}^t f : \quad & F^* \to E^* \\ & \varphi \mapsto \varphi \circ f \end{aligned} \tag{1}$$

Proposition 11. *Soit F un sev de E. F est f-stable si et seulement si $F^\perp$ est ${}^t f$-stable.*

Remarque 12. Ce résultat peut-être très utile en réduction des endormophismes. En effet, si x est un vecteur propre de ${}^t f$, alors la droite $\mathbb{K}x$ est stable par ${}^t f$ et donc $(\mathbb{K}x)^\circ$ est stable par f et est de dimension n-1. On utilise par exemple ce résultat pour montrer le théorème de co-trigonalisation.

> **Théorème 13.** *(Décomposition de Jordan). Soit u un endomorphisme nilpotent d'ordre q supérieur à 1. Alors il existe une base B tel que la matrice de u dans B soit diagonale par blocs avec des blocs de Jordan*

Application 14. *On en déduit la décomposition de Jordan pour un endomorphisme f qui possède un polynôme caractéristique scindé.*

2 Application à la réduction

2.1 Polynômes d'endomorphismes et sous-espaces propres

Définition 15. $\lambda \in \mathbb{K}$ est valeur propre de u si il exite x non-nul dans E tel que $f(x) = \lambda x$. On appelle E_λ l'espace propre associén à la valeur propre λ. On a l'égalité $E_\lambda = ker(f - \lambda Id)$. C'est un sev de E stable par f.

Exemple 16. Une droite vectorielle est stable par f si et seulement si elle est engendrée par un vecteur propre de f (il s'agit donc d'une droite incluse dans un espace propre).

Définition 17. Défintion du polynôme caractéristique χ_f, il s'agit de $P(X) = det(A - XI_n)$, où A est la matrice de f dans une base B. Il ne dépend pas de la base.

Définition 18. Définition du polynôme minimal μ_f.

Proposition 19. *Les valeurs propres de f sont exactement les racines de χ_f et μ_f.*

Définition 20. Si χ_f est scindé sur $\mathbb{K}$, avec $\chi_f = \Pi_{i=1}^r (X-\lambda_i)^{\alpha_i}$ On appelle sous-espace caractéristique de f associé à la valeur propre λ_i le sev $N_i = ker((f-\lambda_i Id)^{\alpha_i})$. Ces espaces sont stables par f.

Proposition 21. *Soit F un sev stable par f. Alors :*

- χ_{f_F} *divise* χ_f
- μ_{f_F} *divise* μ_f

Proposition 22. *Soit $E = F \oplus G$ avec F et G stable par f. Alors :*

- $\chi_f = \chi_{f_F}\chi_{f_G}$
- $\mu(f)$*=ppcm(*μ_{f_F}, μ_{f_G}*)*

Théorème 23. *Théorème de Cayley-Hamilton : Le polynôme minimal divise le polynôme caractéristique.*

Corollaire 24. *La dimension du sous-espace caractéristique associé à une valeur propre λ est exactement le degré de λ en tant que racines de χ_F.*

2.2 Lemme des noyaux et conséquences

Théorème 25. *Soit P=$\Pi_{i=1}^r Pi$ un polynôme annulateur de f tel que les polynômes $(P_1, ..., P_r)$ soient premiers entre eux deux à deux. Alors on à la décomposition suivante de E en sous-espace stable par f : $E = \oplus_{i=1}^r Ker(P_i(f))$. Et les projecteurs sur $Ker(P_i(f))$ sont des polynômes en f.*

Proposition 26.

- *Si f possède n valeurs propres distinctes, alors f est diagonalisable*
- *Si χ_f est scindé à racine simple, alors f est diagonalisable*

Proposition 27. *Soit f tel que son polynôme caractéristique est scindé sur $\mathbb{K}$. On à les propriétés suivantes sur les espaces caractéristiques N_i (On reprend les notations de la définition) :*

- $E = \oplus_{i=1}^r N_i$
- *Pour tout i, $dim(N_i) = \alpha_i$*

Théorème 28. *si et seulement si χ_f est scindé, et la dimension de chaque espace propre est égal à la dimension du sous-espace caractéristique correspondant si et seulement si il existe des valeurs propres tel que $E = \oplus_{i=1}^r E_{\lambda_i}$ si et seulement si dim(E)=$\sum_{i=1}^r$ dim(E_{λ_i}*

Théorème 29. *f est diagonalisable si et seulement si f admet un polynôme annulateur scindé à racine simples si et seulement si μ_f est scindé à racines simples.*

Exemple 30. Les projecteurs et les symétries vectorielles sont diagonalisables car $X^2 - X$ et $X^2 - 1$ sont respectivement des polynômes annulateurs scindés à racine simple.
Exemple 31. Le seul endomorphisme nilpotent et diagonalisable est l'endomorphisme nul.

Théorème 32. *Un endomorphisme f est trigonalisable si et seulement si il admet un polynôme annulateur scindé sur $\mathbb{K}$ si et seulement si χ_f est scindé si et seulement si μ_f est scindé.*

Corollaire 33. *Une matrice a coefficient dans $\mathbb{C}$ est toujours trigonalisable.*

Proposition 34.

- *Si f est diagonalisable et F un sev stable de E. Alors f_F est diagonalisable.*
- *Si f est trigonalisable et F un sev stable de E. Alors f_F est trigonalisable.*

Application 35. *Décomposition de Dunford. Soit f un endomorphisme de E tel que χ_f soit scindé. Alors il existe (d,n) tel que f=d+n avec d diagonalisable et n nilpotent qui commutent. De plus, il s'agit de polynômes en f.*

2.3 Co-réduction

Théorème 36. *Si f et g sont diagonalisables et commutent, alors il existe une base commune de diagonalisation de f et g.*

Théorème 37. *Si f et g sont trgonalisables et commutent, alors il existe une base commune de trigonalisation de f et g.*

Application 38. *Décomposition polaire.*

Application 39. *Homéomorphisme de exp entre $\mathbb{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathbb{S}_n(\mathbb{R})^{++}$*

3 Des endormorphismes remarquables

3.1 Endomorphismes cycliques

Définition 40. On définit le polynôme minimal local en f, $\mu_{f,x}$. Il divise μ_f
Définition 41. Soit f un endomorphisme et $x \in E$ non-nul. Le sous-espace cyclique associé à f est le plus petit (pour l'inclusion) sous-espace stable par f contenant f. Il est noté $E_{f,x}$.

Proposition 42. *On à l'égalité $E_{f,x} = Vect((f^k(x)_{k\in\mathbb{N}})$. La dimension de $E_{f,x}$ est deg($\mu_{f,x}$).*

Définition 43. Un endomorphisme f est dit cyclique si il exsite x dans E tel que E=$E_{f,x}$.

Exemple 44. Un endomorphsme d'un espace de dimension 2 est soit une homothétie, soit un endomorphisme cyclique.

Proposition 45. *f est cyclique si et seulement si le degré de μ_f est n.*

Proposition 46. *Soit f un endomorphisme de E. Il existe x dans E tel que $\mu_f = \mu_{f,x}$*

Théorème 47. *Soit f un endomorphisme de E et x tel que $\mu_f = \mu_{f,x}$. Alors $E_{f,x}$ admet un supplémentaire stable par f.*

3.2 Endomorphismes semi-simples

Définition 48. Soit f $\in \mathbb{L}(E)$. f est dit semi-simple si pour tout F sev f-stable de E, F admet un supplémentaire S stable par f.

Théorème 49. *f est semi-simple si et seulement si il n'y a pas de facteurs carrés dans μ_f.*

Remarque 50. Si $\mathbb{K}$ est algébriquement clos, être semi-simple est équivalent à être diagonalisable.

3.3 Endomorphismes remarquables d'un espace euclidien ou hermitien

Cadre : Soit E un espace hermitien ou euclidien de dimension n, munit du produit scalaire $< .|. >$.

Définition 51. Soit u un endomorphisme de E. On définit l'adjoint de u comme l'unique endomorphisme u^* qui vérifie $\forall (x,y) \in E^2, < u(x)|y > = < x|u^*(y) >$.

Remarque 52. Matriciellement, la matrice de l'endomorphisme adjoint de u dans une base orthonormée est la transconjuguée de la matrice de u dans cette base.

Définition 53. Soient $\mathcal{B}$ une base orthonormée, $u \in \mathbb{L}(E)$ et $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$. On donne dans le tableau ci-dessous les caractérisations matricielles des endomorphismes remarquables :

u	définition	$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u^*)$
symétrique (ou autoadjoint)	$u^* = u$	${}^*A = A$
antisymétrique	$u^* = -u$	${}^*A = -A$
orthogonal	$u^* = (u)^{-1}$	${}^*AA = I$
normal	$u^*u = uu^*$	${}^*AA = A^*A$

Remarque 54. Les endomorphismes symétriques et orthogonaux sont en particulier normaux

Théorème 55. *Soit F un sev de E. F est stable par u si et seulement si $F^\perp$ est stable par u^*. (Attention, ici l'orthogonalité est définie dans le cadre euclidien ou hermitien).*

Corollaire 56. *Si u est normal, alors F est stable par u si et seulement si $F^\perp$ est stable par u.*

Application 57. *Soit E un espace* ***hermitien****. Alors si u est un endomorphisme normal, u est diagonalisable dans une BON de vecteurs propres. Le résultat s'applique aussi aux endomorphismes orthogonaux et auto-adjoints.*

Remarque 58. Dans le cas réel, la situation n'est pas aussi simple, comme le montre par exemple les théorèmes suivants :

Théorème 59. *Théorème spectrale. Soit E euclidien et u autoajoint. Alors u est diagonalisable dans une BON.*

Théorème 60 (Réduction). *Soit $u \in \emptyset(E)$ un endomorphisme orthogonal d'un espace E euclidien. Il existe une base orthonormée $\mathcal{B}$ de E dans laquelle*

$$Mat_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} I_{p_1} & & & & & \\ & -I_{p_2} & & & & \\ & & R_1 & & & \\ & & & R_2 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & R_s \end{pmatrix}$$

où pour tout $j \in 1s$, $R_j = \begin{pmatrix} \cos(\theta_j) & -\sin(\theta_j) \\ \sin(\theta_j) & \cos(\theta_j) \end{pmatrix}$ avec $\theta_j \in]0, 2\pi[\backslash\{\pi\}$