150 – Exemples d'actions de groupes sur les espaces de matrices.

Références : H2G2, Gourdon, Rombaldi, Grifonne, Mansuy

Dans toute la leçon, E est un $\mathbb{K}$-e.v de dimension finie n, avec $\mathbb{K}$ un corps commutatif.

1 Action de groupe sur des matrices rectangulaires

1.1 Actions à gauches et à droites par multiplication

Définition 1. On définit une action de groupe de $Gl_n(\mathbb{K})$ sur $M_{n,m}(\mathbb{K})$ par : $M.A = MA$ pour tout $(M, A) \in Gl_n(\mathbb{K}) \times M_{n,m}(\mathbb{K})$ (multiplication à gauche). On définit de même l'action par multiplication à droite.

Définition 2. Soit $\lambda \in \mathbb{K}^*$.
On appelle transvection toute matrice de la forme $T_{i,j}(\lambda) = I_n + \lambda E_{i,j}$.
On appelle dilatation toute matrice de la forme $D_i(\lambda) = I_n + (\lambda - 1)E_{i,i}$.
On appelle matrice de permutation P_σ... Leurs effets par multiplication sur une matrice M sont les suivants :

$\mathrm{M}T_{i,j}(\lambda)$	$T_{i,j}(\lambda)M$	$\mathrm{M}D_i(\lambda)$	$D_i(\lambda)M$
$C_j \leftarrow C_j + \lambda C_i$	$L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$	$C_i \leftarrow \lambda C_i$	$L_i \leftarrow \lambda L_i$

Définition 3. Soit $A \in M_{n,m}(\mathbb{K})$, on appelle pivot d'une ligne non-nulle le premier coefficient non-nul de la ligne.
On appelle matrice échelonnée (en ligne) toute matrice A qui vérifie :

- Si une est nulle, toute les lignes suivantes le sont aussi
- Le pivot d'une ligne est strictement plus à droite que celui de la ligne précédente.
- Si tout le pivots sont égaux à 1, la matrice est dite échelonée réduite.

On appelle type d'une matrice échelonnée la suite d'entier strictement croissant $j = (j_1, ..., j_r)$ donnant la prosition des pivots (on à r égal au rang de la matrice)
Une matrice est échelonée en coloconne si sa transposée est échelonnée en ligne.

Exemple 4. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ est échelonnée, de type $(1, 3)$

Théorème 5. — *Deux matrices $A, A' \in M_{n,m}(\mathbb{K})$ sont dans la même orbite pour l'action de multiplication à gauche $\iff \ker(A) = \ker(A')$*
— *Deux matrices $A, A' \in M_{n,m}(\mathbb{K})$ sont dans la même orbite pour l'action de multiplication à droite $\iff Im(A) = Im(A')$*

Théorème 6. *On considère l'action de groupe de multiplication à gauche définit ci-dessus. Toute matrice de $M_{n,m}(\mathbb{K})$ est dans l'orbite d'une unique matrice échelonée réduite en ligne.*

Remarque 7. — C'est une notion essentielle pour résoudre des systèmes linéaires
— On à la même chose pour l'action de multiplicatin à droite pour les matrice échelonnée réduite en colonne.
— On voit apparaitre ici une notion classique : les matrices écholonnées représentent toutes les orbites de cette action, on parle de forme normal.

Exemple 8 (L1). Echelonnement d'un système linéaire et résolution par remontée.

1.2 L'action de Steinitz (ou action par équivalence)

Définition 9. On fait agir $GL_n(\mathbb{K}) \times GL_m(\mathbb{K})$ sur $M_{m,n}(\mathbb{K})$ par $(P, Q).A = PAQ^{-1}$
Deux matrices $A, B \in M_{m,n}(\mathbb{K})$ sont dits équivalentes si elles sont dans la même orbite pour cette action.

Proposition 10 (Changement de base). *Deux matrices $A, B \in M_{m,n}(\mathbb{K})$ représentent la même application linéaire dans des bases différentes $\iff$ A et B sont équivalentes.*

Théorème 11 (du rang). — *Soit A de rang r, alors A est équivalente à I_r*
— *A et B sont équivalentes $\iff$ A et B ont le même rang. En particulier, les orbites sont paramétrés par le rang.*

2 Action de similitude et réduction

Définition 12. On fait agir $GL_n(\mathbb{K})$ par conjugaison sur $M_n(\mathbb{K})$: $P.A = PAP^{-1}$.
Deux matrices qui sont dans la même orbites sont dits semblables

Proposition 13. *Deux matrices de taille n représentent la même application linéaire $f : E \to E$ si et seulement si elles sont équivalentes.*

Théorème 14. *On restreint l'action de similitude à l'ensemble $D_n(\mathbb{K})$ des matrices diagonalisables.*
Deux matrices diagonalisables sont dans la même orbites pour cette action $\iff$ elles ont le même spectre.

Corollaire 15. *Le polynôme caractéristique est un invariant de similitude pour cette action restreinte.*

Théorème 16 (Décomposition de Jordan des endomorphismes nilpotents). *Soit M une matrice nilpotente non-nul. Alors il existe une matrice dans l'orbite de M pour l'action de similitude qui soit diagonale par blocs avec des blocs de Jordan, et cette décomposition est unique à l'ordre près des blocs.*
Autrement dit, la décomposition de Jordan caractérise les matrices nilpotentes, (à l'ordre près des blocs)

Théorème 17 (Frobenius et invariant de similitude). *Soit $M \in M_n(\mathbb{K})$. Alors il existe des polynômes $P_1, ..., P_r$ tels que $P_1|P_2...P_r$ tel qu'il existe une matrice dans l'orbite de M pour l'action de similitude qui soit de la forme diag$(C_{P_1}, ..., C_{P_r})$ où C_{P_i} est une matrice compagnon associée à P_i.*
Ces polynômes sont uniques et sont appelées invariant de similitude de la matrice M.

2.1 Topologie des classes de similitudes

Proposition 18. *Une matrice de $M_n(\mathbb{C})$ est une nilpotente $\iff$ 0 appartient à l'adhérence de sa classe de similitude.*

Proposition 19. *Une matrice de $M_n(\mathbb{C})$ est diagonalisable $\iff$ sa classe de similitude est fermé.*

3 Action de congruence

3.1 Lien avec les formes quadratiques

Définition 20. On définit l'action de $GL_n(\mathbb{K})$ sur $S_n(\mathbb{K})$ par congruence : $P.A =^t PAP$. Deux matrices sont dites congruentes si elles sont dans la même orbite pour cette action.

Définition 21. Soit q une forme quadratique et φ sa forme polaire. Alors avec $B = (e_1, ..., e_n)$ base de E, on note $M = ((\varphi(e_i, e_y)) \in S_n(\mathbb{K})$ appelée matrice de φ (et donc de q) dans la base B. Alors pour tout $(x, y) \in E^2$, en notant X,Y les vecteurs des coordoonées de x et y dans B, on à : $\varphi(x, y) =^t XMY$ et $q(x) =^t XMX$. L'application qui a une q associe sa matrice dans une base est un isomorphisme.

Proposition 22. *Deux matrices sont congruentes $\iff$ elles représentes la même forme quadratique $q \in \mathcal{Q}(E)$ dans des bases différentes.*

Définition 23. Deux formes quadratiques q et q' sur E sont dits équivalentes si il existe un endomorphisme u tel que $q \circ u = q'$.

Corollaire 24. *Deux formes quadratiques sont équivalentes $\iff$ leurs matrices associées sont dans la même classe de congruence.*

Théorème 25 (Classification des formes quadratiques sur un e.v complexe). *Soit E un $\mathbb{C}$-e.v de dim n et q une forme quadratique sur E. Il existe alors une base B=$(e_1, ..., e_n)$ tel que pour tout $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i \in E$, on a $q(x) = x_1^2 + ... + x_r^2$ avec r=rg(q). Dans cette base, la matrice de q est $\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Donc deux matrices symétriques sont congruentes $\iff$ elles ont le mêmes rangs.*

Théorème 26 (Théorème spectral). *Soit M une matrice symétrique réelle. Alors il existe une matrice diagonale dans l'orbite de M pour la relation de congruence et de similitude.*

3.2 Signature d'une forme quadratique réelle [R]

Théorème 27 (Sylvester). *[Gri] Soit q une forme quadratique sur réelle sur E. Il existe une base B=$(e_1, ..., e_n)$ de E tel que la matrice de q dans B soit de la forme : $\begin{pmatrix} I_p & 0 & 0 \\ 0 & -I_{r-p} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ où r=rang(q).On à pour $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$, $q(x) = x_1^2 + ... + x_s^2 - x_{s+1}^2 - ... - x_r$. L'entier naturel p est indépendant de la base et ne dépend que de q. Le couple (p,r-p) est appelé signature de q. Donc deux matrices symétriques sont équivalentes $\iff$ elles ont la même signature.*

Théorème 28. *En désigant par P (resp. N) l'ensemble des espaces vectoriels F de E tels que la restriction de q à F soit définie-positive (resp. définie négative), la signature de q est donnée par : $= \begin{cases} 0 \text{ si } P = \emptyset \\ \max\limits_{F \in P} \dim(F) & \text{sinon.} \end{cases}$ et $\ddot{=} \begin{cases} 0 si N = \emptyset \\ \max\limits_{F \in N} \dim(F) & \text{sinon} \end{cases}$* ▷

3.3 Classification sur un corps finis

Cadre : Soit E un $\mathbb{F}_q$ espace vectoriel de dimension finie, avec F_q un corps à q éléments de caractéristique différente de 2.

Proposition 29. *Il y a $\frac{q+1}{2}$ carrés dans $\mathbb{F}_q$ et autant de non-carrés.*

Lemme 30. *Soient a, b dans $\mathbb{F}_q^*$, alors l'équation en x et y : $ax^2 + by^2 = 1$ admet des solutions dans $\mathbb{F}_q$*

Théorème 31 (Réduction des formes quadratiques sur un corps finis). *Soit q une forme quadratique sur E, de rang r et α un non-carré de $\mathbb{F}_q^*$ fixé. Alors il existe une base B tel que la matrice de q dans cette base soit de la forme : $\begin{pmatrix} I_{r-1} & 0 & 0 \\ 0 & \delta & 0 \\ 0 & 0 & O_{n-r} \end{pmatrix}$ avec $\delta \in \{1, \alpha\}$.*

Corollaire 32. — *Soit q et q' deux formes quadratiques non-dégénérées. Alors q et q' sont équivalentes* $\iff$ *pour toute base B de E,* $\frac{discr_B(q')}{discr_B(q)}$ *soit un carré de* $\mathbb{F}_q$.

— *Dans l'espace vectoriel des formes quadratiques, il y a 2n+1 classes d'équivalences différentes.*

4 Décomposition polaire et applications

Définition 33. On appelle groupe orthogonal réel d'ordre n le stabilisateur de I_n pour l'action de congruence de $GL_n(\mathbb{R})$ sur $S_n(\mathbb{R})$. Il est noté $\mathcal{O}(n)$

Théorème 34 (Décomposition polaire). *L'application*

$$\mu : \begin{array}{rcl} \mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \times S_n^{++}(\mathbb{R}) & \longrightarrow & GL_n(\mathbb{R}) \\ (O,S) & \longmapsto & OS \end{array}$$

est un homéomorphisme.

i.e ce résultat s'interprète dans l'action de $\mathcal{O}_n$ *sur* $GL_n(\mathbb{R})$ *par multipication à gauche. Dans l'orbite de toute matrice M inversible, il existe une unique matrice symétrique définie-positive.*

Application 35. *Pour toute matrice* $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$*, on a :*

$$|||A|||_2 = \sqrt{\rho({}^tAA)}$$

Définition 36. On appelle $O(p,q)$ le stabilisateur de la matrice $I(p,q)$ pour l'action de congruence de $GL_n(\mathbb{R})$ sur $S_n(\mathbb{R})$, ie $O(p,q) = \{M \in GL_n(\mathbb{R}) \mid PI_{p,q}^tP = I_{p,q}\}$

Remarque 37. $O(p,q)$ est le sous-groupe de $\mathbb{G}l_n(\mathbb{R})$ formé des isométries de la forme quadratique réelle sur $\mathbb{R}^{'+''}$ dont la matrice dans la base canonique est : $\begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & -I_q \end{pmatrix}$. Par exemple, le sous-groupe $O(1,3)$ est appelé sous-groupe de Lorentz.

Proposition 38. *Si* $f \in O(q)$*, alors est inversible* $(det(f) = \pm 1)$ *et* $f^{-1} \in \mathbb{O}(q)$*. De plus, l'ensemble* $O(q)$ *est un sous-groupe de* $\mathbb{G}l_n(\mathbb{K})$ *muni de la loi de composition, appelé groupe orthogonal de q.*

Théorème 39. *On a un homéomorphisme tel que :* $O(p,q) \simeq O_n \times O_n \times \mathbb{R}^{pq}$