106 - Groupe linéaire d'un espace vectoriel de dimension finie E, sous-groupes de GL(E). Applications.

Références : Rombaldi, H2G2, Perrin, Gourdon Algèbre, Allaire (Analyse Numérique Matricielle)

Cadre : Soit $\mathbb{K}$ un corps commutatif et E un $\mathbb{K}$-e.v de dimension finie n.

1 Définitions et correspondance matriciel

Définition 1. On appelle groupe linéaire de E l'ensemble des éléments inversibles de $\mathcal{L}(E,E)$ munis de la loi de composition $\circ$, on le note $GL(E)$.
On appelle $GL_n(\mathbb{K})$ le groupe des matrices inversibles de $\mathbb{M}_n(\mathbb{K})$ munis de la loi produit.

Théorème 2. *Soit $\mathcal{B}$ une base de E. L'application*

$$\begin{array}{cccc} \varphi & : & GL(E) & \to & GL_n(\mathbb{K}) \\ & & f & \mapsto & [f]_{\mathcal{B}} \end{array}$$

est un isomorphisme entre $GL(E)$ et $GL_n(\mathbb{K})$

Théorème 3. *Les propositions suivantes sont équivalentes :*

- $u \in GL(E)$
- $\ker(u) = \{0\}$ *(i.e u est injectif)*
- $Im(u) = E$ *(i.e u est surjectif)*
- $rg(u) = n$
- $\det(u) \neq 0$
- *u transforme toute base de E en une base de E*
- *u admet un inverse à droite*
- *u admet un inverse à gauche*

Définition 4.
- $GL_n(\mathbb{K})$ agit par translation à gauche sur $\mathbb{M}_n(\mathbb{K})$ par : P.(A)=PA
- $GL_n(\mathbb{K}) \times GL_m(\mathbb{K})$ agit par équivalence sur $\mathbb{M}_{n,m}(\mathbb{K})$ par : $(P,Q).A = PAQ^{-1}$
- $GL_n(\mathbb{K})$ agit par congruence sur $\mathbb{M}_n(\mathbb{K})$ par : $P.(A) = PAP^t$
- $GL_n(\mathbb{K})$ agit par conjugaison sur $\mathbb{M}_n(\mathbb{K})$ par : $P.(A) = PAP^{-1}$

Définition 5. On note $SL(E) = \{u \in GL(E) \mid \det(u) = 1\}$. C'est un sous-groupe distingué de $GL(E)$. On note $SL_n(\mathbb{K})$ sont analogues matriciels, ils sont isomorphes.

Proposition 6. *On à* $\dfrac{GL(E)}{SL(E)} = \mathbb{K}^*$

Proposition 7. *$\mathcal{Z}(GL_n(\mathbb{K})) = \mathbb{K}^*.I_n$ et $\mathcal{Z}(SL_n(\mathbb{K})) = \mu_n(\mathbb{K}).I_n$ où $\mu_n(\mathbb{K})$ est le groupe des racines n-ème de l'unité dans $\mathbb{K}^*$.*

2 Générateurs de $SL(E)$ et $GL(E)$

Définition 8. Soit $\lambda \in \mathbb{K}^*$.

- On appelle transvection toute matrice de la forme $T_{i,j}(\lambda) = I_n + \lambda E_{i,j}$.
- On appelle dilatation toute matrice de la forme $D_i(\lambda) = I_n + (\lambda - 1)E_{i,i}$.
- On appelle matrice de permutation toute matrice de la forme $P_{i,j} = I_n + E_{i,j} - E_{i,i} - Ej,j$

Leurs effets par multiplication sur une matrice M sont les suivants :

M$T_{i,j}(\lambda)$	T$_{i,j}(\lambda)M$	M$D_i(\lambda)$	D$_i(\lambda)M$	P$_{i,j}M$	M$P_{i,j}$
C$_j \leftarrow C_j + \lambda C_i$	L$_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$	C$_i \leftarrow \lambda C_i$	L$_i \leftarrow \lambda L_i$	C$_i \leftrightarrow C_j$	L$_i \leftrightarrow L_j$

Proposition 9. *L'application*

$$\begin{array}{cccc} \varphi & : & S_n & \to & GL_n(\mathbb{K}) \\ & & \sigma & \mapsto & P_\sigma \end{array}$$

est injective. Donc S_n est isomorphe à un sous-groupe de $GL_n(\mathbb{K})$. Et on à $\det(P_\sigma) = \varepsilon(\sigma)$.

Théorème 10 (Pivot de Gauss). *A et B sont de même rang $\iff$ A et B sont équivalentes.*

Application 11.
- *Les matrices de transvections engendrent $GL_n(\mathbb{K})$*
- *Les matrices de transvectons et de dilatations engendrent $SL_n(\mathbb{K})$*

Application 12 (Décomposition LU). *Soit $A \in_n (\mathbb{C})$ dont tout les mineurs sont positifs, alors il existe un couple (L,U) avec L triangulaire inférieure à diagonale unité et U triangulaire supérieure tel que $A = LU$.*

Proposition 13. *Soit H un hyperplan de E et $u \in GL(E)$ tel que $u_H = Id_H$. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

- $\det(u) = \lambda \neq 1$ *(i.e $u \notin SL(E)$)*

— *u admet une valeur propre λ différente de 1 et u est diagonalisable.*

— *$Im(u - Id) \subset H$*

— *Dans une base convenable, la matrice de u est de la forme $D_n(\lambda)$*

Dans ce cas, on dit que u est une dilation d'hyperplan H et de rapport λ.

Proposition 14. *Soit $H = \ker(f)$ un hyperplan de E et $u \in GL(E)$, $u \neq Id$ tel que $u_H = Id_H$. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

— $\det(u) = 1$ *(i.e $uinSL(E)$)*

— *u n'est pas diagonalisable.*

— *$Im(u - Id) \subset H$*

— *Il existe $a \in H$, $a \neq 0$, tel que l'on ait : $\forall x \in E$, $u(x) = x + f(x)a$*

— *Dans une base convenable, la matrice de u est une matrice de transvection*

Dans ce cas, on dit que u est une transvection d'hyperplan H et de droite $D = Im(u - Id) = (a)$.

Théorème 15. — *Les transvections engendrent $GL_(E)$*

— *Les transvectons et dilatations engendrent $SL(E)$*

3 Le groupe orthogonal

On suppose que E est muni d'un produit scalaire $< .|. >$ (E est euclidien)

Définition 16. On appelle groupe orthogonal (ou groupe des isométries) l'ensemble des applications f telles que $\forall x \in E$, $||f(x)|| = ||x||$.

Proposition 17. *f est une isométrie $\iff$ $\forall (x, y) \in E^2, < f(x)|f(y) >=< x|y >$. Ainsi, si f est une isométrie, alors elle est bijective et son inverse est égale à son adjoint f^*, et $\mathcal{O}(E)$ est un sous-groupe compacte de $GL(E)$*

Définition 18. On appelle groupe orthogonal $\mathcal{O}_n(\mathbb{K}) = \{M \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K}) \mid MM^t = I_n\}$. C'est un sous-groupe compacte de $GL_n(\mathbb{K})$, isomorphe à $\mathcal{O}(E)$.

Proposition 19. *Soit $M \in \mathcal{O}_n(\mathbb{K})$*

— *Le déterminant de M est 1 ou -1.*

— *$\mathcal{O}_n^+ = \{A \in \mathcal{O}_n \mid \det(A) = 1\}$ et $\mathcal{O}_n^- = \{A \in \mathcal{O}_n \mid \det(A) = -1\}$ sont des sous-groupes de $\mathcal{O}_n(E)$ distingués et d'indice 2. (i.e $\dfrac{GL_n(\mathbb{K})}{\mathcal{O}_n^+} = \{1, -1\}$)*

Exemple 20. Avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et en dimension 2, la matrice d'une isométrie directe du plan s'écrit $\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$, $\theta \in \mathbb{R}$.

Théorème 21 (Réduction). *Soit $u \in \mathcal{O}(E)$ un endomorphisme orthogonal. Il existe une base orthonormée $\mathcal{B}$ de E dans laquelle*

$$Mat_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} I_{p_1} & & & & & \\ & -I_{p_2} & & & & \\ & & R_1 & & & \\ & & & R_2 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & R_s \end{pmatrix}$$

où pour tout $j \in 1s$, $R_j = \begin{pmatrix} \cos(\theta_j) & -\sin(\theta_j) \\ \sin(\theta_j) & \cos(\theta_j) \end{pmatrix}$ avec $\theta_j \in]0, 2\pi[\backslash\{\pi\}$

Définition 22. — On appelle symétrie orthogonale un endomorphisme orthogonal s telle que $s^2 = s$ et $s \neq Id$. Il existe une base tel que sa matrice soit de la forme $\begin{pmatrix} I_{p_1} & \\ & -I_{p_2} \end{pmatrix}$. (On dit que s est une symétrie par rapport à E_1 avec $E = E_1 \oplus E_{-1}$)

— On appelle réflexion une symétrie orthogonale par rapport à un sous-espace de dimension $n - 1$.

— On appelle retournement une symétrie orthogonale par rapport à un sous-espace de dimension $n - 2$.

Théorème 23.

— *Les réflexions engendrent $O_n(\mathbb{K})$*

— *Les retournements engendrent $O_n(\mathbb{K})$*

Théorème 24 (Décomposition polaire).
L'application

$$\begin{array}{rrcl} \mu : & \O_n(\mathbb{R}) \times \S_n^{++}(\mathbb{R}) & \longrightarrow & _n(\mathbb{R}) \\ & (O, S) & \longmapsto & OS \end{array}$$

est un homéomorphisme.

Application 25. *Pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a :*

$$|||A|||_2 = \sqrt{\rho(^tAA)}$$

Application 26. *Tout sous-groupe compact de $_n(\mathbb{R})$ qui contient $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ lui-même.*

Application 27. *Etude du groupe $O(p, q)$*

4 Le cas des corps finis

Cadre : Soit $\mathbb{F}_q$ un corps à $q = p^n$ éléments

Proposition 28. $|Gl_n(\mathbb{F}_q)| =_{k=0}^{n-1} (q^n - q^k) = q^{\frac{n(n-1)}{2}} \Pi_{k=1}^{n} q^k - 1$
$|Sl_n(\mathbb{F}_q)| = q^{\frac{n(n-1)}{2}}_{k=2}{}^{n-1}(p^n - p^k)$
$|T_n(\mathbb{F}_q)| = q^{\frac{n(n-1)}{2}}$ *(Matrice triangulaire supérieure à diagonale unité), c'est un p-sylow de* $Gl_n(\mathbb{F}_q)$

Théorème 29. *On note $D_n(\mathbb{F}_{||})$ l'ensemble des automorphismes diagonalisables de $Gl_n(\mathbb{F}_q)$. Alors :*

$$|D_n(\mathbb{F}_{||})| = \sum_{n_1,\ldots,n_{q-1} | n_1+..+n_{q-1}=n} \frac{|Gl_n(\mathbb{F}_q)|}{\Pi_{i=1}^{q-1} |Gl_{n_i}(\mathbb{F}_q)|}$$

5 Topologie sur $GL_n(\mathbb{K})$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

Proposition 30. *L'espace $\mathcal{L}(E, E)$ muni de la norme opérateur est un espace de Banach.*

Proposition 31.
- *Soit $u \in \mathcal{L}(E, E)$ telle que $||u|| < 1$, alors $u - Id \in GL(E)$ et $(u - Id)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} u^k$.*
- *$GL(E)$ est un ouvert de $\mathcal{L}(E, E)$*

Théorème 32. *$GL_n(\mathbb{K})$ est dense dans $\mathbb{M}_n(\mathbb{K})$.*

Application 33. *Soit A,B deux matrices. Alors $\chi_{AB} = \chi_{BA}$.*

Proposition 34. *$GL_n(\mathbb{C})$ est connexe par arcs.*

Proposition 35. *Les composantes connexes de $\mathcal{O}(E)$ sont $\mathcal{O}^+(E)$ et $\mathcal{O}^-(E)$*