

# Systèmes d'équations linéaires ; opérations élémentaires, aspects algorithmiques et conséquences théoriques.

Mohamed NASSIRI

RACONTE TA LIFE.

## Références

- [GRI] Algèbre linéaire 5e Edition, Joseph Grifone  
[MER] Cours de géométrie, Dany-Jack Mercier  
[DUM] Modélisation à l'oral de l'Agrégation : Calcul scientifique, Laurent Dumas  
[CIA] Introduction à l'analyse numérique matricielle et à l'optimisation, Philippe Ciarlet  
[FILB] Analyse numérique : Algorithme et étude mathématique, Francis Filbet  
[DIM] Analyse numérique des équations aux dérivées partielles, Laurent Di Menza ♠  
[WAR] Mathématiques tout-en-un MPSI-PCSI, Claude Deschamps et André Warusfel

## Développements

Convergence des méthodes itératives  
Méthode du gradient à pas optimal

## 1 Généralités

**Théorème 5** *Théorème de Cramer :*  
*Un système de Cramer :*

### 1.1 Définition [GRI] p.37-39

**Définition 1** *On appelle système d'équations linéaires un système du type*

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

où les  $x_i$  sont dites inconnues, et résoudre le système signifie déterminer les  $x_i$ , s'il y en a, qui vérifient toutes les équations. (avec  $A = (a_{ij}) = (c_1, \dots, c_n)$  et  $\det A \neq 0$ ) admet toujours une et une seule solution  $\forall b = (b_1, \dots, b_n)$  donnée par les formules de Cramer :

**Remarque 2** *On écrit le système précédent sous la forme matricielle*

$$Ax = b$$

avec

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \text{ et } b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

**Définition 3** *On dit qu'une matrice est échelonnée si les lignes commencent par un nombre de zéros strictement croissant à mesure que l'indice augmente.*

### 1.2 Système de Cramer [GRI] p.142-143

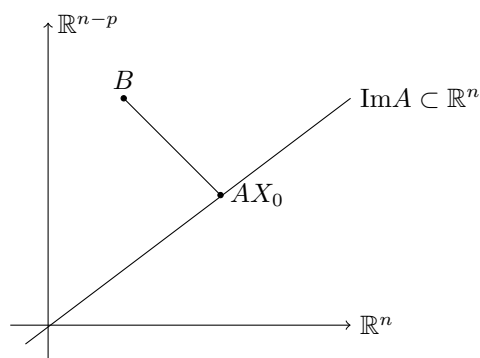
**Définition 4** *On appelle système de Cramer un système linéaire dont la matrice est carrée et inversible.*

### 1.3 Moindres carrés [MER] p.142

**Proposition 6** *Minimisation de  $\|AX - B\|^2$  : Soient  $A$  une matrice à  $n$  lignes et  $p$  colonnes à coefficients dans  $\mathbb{R}$ ,  $X$  un vecteur colonne de  $\mathbb{R}^p$  et  $B$  un vecteur colonne de  $\mathbb{R}^n$*

- 1) *Le minimum de  $\|AX - B\|^2$  pour  $X$  décrivant  $\mathbb{R}^p$  est atteint en un point  $X_0$  qui vérifie  $Ax_0 = p(B)$ , où  $p$  désigne la projection orthogonale de  $\mathbb{R}^n$  sur  $\text{Im}A$ .*
- 2) *Si  $\text{rg}A = p$ , alors  $X_0$  est unique et vérifie*

$${}^t A A X_0 = {}^t A B$$



## 2 Méthodes directes

### 2.1 Opérations élémentaires [WAR] p.901 → 903

Dans cette section,  $A$  désigne une matrice de  $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$

**Définition 7** On appelle opérations élémentaires sur les lignes (resp. colonnes) d'une matrice l'une des trois opérations suivantes :

- (i) addition d'un multiple d'une ligne (resp. colonne) à une autre ligne (resp. colonne).
- (ii) multiplication d'une ligne (resp. colonne) par un scalaire non nul,
- (iii) échanges de deux lignes (resp. colonnes).

**Remarque 8** Etant donnés deux entiers distincts  $i$  et  $j$  compris entre 1 et  $n$  et  $\lambda \in \mathbb{K}^*$ , on convient des codages suivants :

- (i) addition de  $\lambda L_j$  à la ligne  $L_i$  :  $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$
- (ii) multiplication de  $L_i$  par  $\lambda$  :  $L_i \leftarrow \lambda L_i$
- (iii) échange de  $L_i$  et  $L_j$  :  $L_i \leftrightarrow L_j$

On utilise le même codage pour les colonnes en remplaçant  $L$  par  $C$ .

**Proposition 9** Deux matrices déduites l'une de l'autre par un nombre fini d'opérations élémentaires ont même rang.

**Définition 10** On appelle matrice de transvection toute matrice de la forme  $T_{ij}(\lambda) = I_n + \lambda E_{i,j}$  avec  $i \neq j$  et  $\lambda \in \mathbb{K}$ .

On appelle matrice de dilatation toute matrice diagonale  $D_i(\lambda) = I_n + (\lambda - 1)E_{i,i}$  avec  $\lambda \in \mathbb{K}^*$

**Proposition 11** (i) Chaque opération élémentaire sur les lignes consiste en la multiplication à gauche par une matrice inversible.

(ii) Chaque opération élémentaire sur les colonnes consiste en la multiplication à droite par une matrice inversible.

**Remarque 12** Plus précisément, on a le Tableau 1 et le résultat intéressant suivant

### 2.2 Méthode de Gauss [CIA] p.73 → 82

**Méthode 13** La méthode de Gauss est une méthode générale de résolution d'un système linéaire  $Au = b$  ( $A$  une matrice inversible). Elle comporte trois étapes :

- (i) Élimination : Déterminer une matrice inversible  $M$  telle que  $MA$  soit triangulaire supérieure.
- (ii) Calcul simultanée de  $Mb$
- (iii) Résolution du système linéaire

$$MAu = Mb$$

par la méthode dite de remontée.

**Théorème 14** Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ . Il existe au moins une matrice  $M \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$  telle que  $MA$  soit triangulaire supérieure.

### 2.3 Factorisation LU [CIA] p.82 → 86

**Théorème 15** Soit  $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  telle que les  $n$  sous-matrices diagonales

$$A_k = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & \dots & a_{kk} \end{pmatrix}, \quad 1 \leq k \leq n$$

soient inversibles.

Alors il existe une matrice triangulaire inférieure  $L = (l_{i,j})$  avec  $l_{i,i} = 1$ ,  $1 \leq k \leq n$ , et une matrice triangulaire supérieure  $U$  telles que

$$A = LU$$

De plus, une telle factorisation est unique.

**Théorème 16** Soit

$$A = \begin{pmatrix} b_1 & c_1 & & & \\ a_2 & b_2 & c_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & a_{n-1} & b_{n-1} & c_{n-1} \\ & & & a_n & b_n \end{pmatrix}$$

une matrice tridiagonale. On définit la suite

$$\begin{cases} \delta_0 = 1, \delta_1 = b_1 \\ \delta_k = b_k \delta_{k-1} - a_k c_{k-1} \delta_{k-2}, \quad 2 \leq k \leq n \end{cases}$$

Alors

$$\delta_k = \det(A_k), \quad \text{où}$$

$$A_k = \begin{pmatrix} b_1 & c_1 & & & \\ a_2 & b_2 & c_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & a_{k-1} & b_{k-1} & c_{k-1} \\ & & & a_k & b_k \end{pmatrix}, \quad 1 \leq k \leq n$$

et, si  $\delta_k \neq 0$ ,  $1 \leq k \leq n$ , la factorisation LU de la matrice  $A$  est  $A = LU$  avec

$$L = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ a_2 \frac{\delta_0}{\delta_1} & 1 & & & \\ & a_3 \frac{\delta_1}{\delta_2} & \ddots & & \\ & & \ddots & 1 & \\ & & & a_n \frac{\delta_{n-2}}{\delta_{n-1}} & 1 \end{pmatrix}$$

$$U = \begin{pmatrix} \frac{\delta_1}{\delta_0} & c_1 & & & \\ & \frac{\delta_2}{\delta_1} & c_2 & & \\ & & \frac{\delta_3}{\delta_2} & \ddots & \\ & & & \ddots & c_{n-1} \\ & & & & \frac{\delta_n}{\delta_{n-1}} \end{pmatrix}$$

## 2.4 Factorisation et méthode de Cholesky [CIA] p.87 → 90

**Théorème 17** Soit  $A$  une matrice symétrique définie positive. Alors il existe au moins une matrice triangulaire inférieure  $B$  telle que

$$A = B^t B$$

De plus, on peut imposer que éléments diagonaux  $B$  soient tous strictement positifs et la factorisation  $A = B^t B$  correspondante est alors unique.

## 2.5 Factorisation QR [FILB] p.34 → 37

**Définition 18** Soit  $u \in \mathbb{R}^n$ . On appelle matrice de Householder la matrice

$$H_u = I_n - 2 \frac{u^t u}{\|u\|^2} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$$

où  $\|u\|^2 = {}^t u u$  lorsque  $u$  est non nul, et  $H_u = I_n$  lorsque  $u = 0$ .

**Proposition 19** Soit  $u \in \mathbb{R}^n$ .

- (i)  $H_u$  est symétrique (i.e.)  $H_u = {}^t H_u$
- (ii)  $H_u$  est inversible et  $H_u^{-1} = H_u$
- (iii)  $H_u v = -v$  pour tout  $v \in \mathbb{R}^n$  colinéaire à  $u$  et  $H_u v = v$  pour tout  $v \in \mathbb{R}^n$  orthogonal à  $u$ .
- (iv)  $\det(H_u) = -1$  lorsque  $u \neq 0$  et  $\det(H_u) = 1$  lorsque  $u = 0$ .

En définitive,  $H_u$  est la matrice de la réflexion d'hy-perplan  $\text{Vect}(u)^\perp$

**Proposition 20** Pour tout  $v \in \mathbb{R}^m$ ,  $m \geq 1$  tel que  $\|v\| = 1$ , il existe  $u \in \mathbb{R}^m$  tel que

$$H_u v = e_1 = (1, 0, \dots, 0)^\perp$$

**Théorème 21** Soit  $A \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$ . Alors il existe une matrice orthogonale  $Q$  et une matrice triangulaire supérieure  $R$  telles que  $A = QR$ .

## 3 Méthodes indirectes

### 3.1 Méthodes itératives

**Définition 22** Si  $(M, N) \in \text{GL}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  est tel que l'on a la décomposition dite décomposition régulière  $A = M - N$ , on dit que la méthode itérative associée à  $(M, N)$  converge si pour tout  $u_0 \in \mathbb{R}^n$ , la suite de premier terme  $u_0$  et définie par  $\forall k \in \mathbb{N}$ ,

$$u_{k+1} = M^{-1}(Nu_k + b)$$

converge. [DUM] p.167

**Remarque 23** On utilise parfois la notation suivante :

$$A = \begin{pmatrix} & \ddots & & & \\ \ddots & & \ddots & -F & \\ & \ddots & D & \ddots & \\ -E & & & \ddots & \\ & & & & \ddots \end{pmatrix} = D - E - F$$

**Exemple 24** Méthodes de Jacobi, Gauss-Seidel et de relaxation :

Voir Tableau 1 [CIA] p.102

**Théorème 25** ♠ Convergence des méthodes itératives ♠ La méthode itérative associée à  $(M, N)$  converge si et seulement si  $\rho(M^{-1}N) < 1$ . [DUM] p.167-168

**Théorème 26** Soit  $A$  une matrice hermitienne symétrique définie positive, décomposée sous la forme

$$A = M - N, \quad M \in \text{GL}_n(\mathbb{C})$$

Si la matrice  $({}^t \overline{M} + N)$  est définie positive, alors

$$\rho(M^{-1}N) < 1$$

[CIA] p.102-103

**Théorème 27** Soit  $A$  une matrice hermitienne symétrique définie positive. La méthode de relaxation converge si  $0 < \omega < 2$ .

Le rayon spectral de la méthode de relaxation vérifie

$$\rho(\mathcal{L}_\omega) \geq |\omega - 1|, \quad \omega \neq 0$$

Par conséquent, la méthode de relaxation ne peut converger que si  $0 < \omega < 2$ . [CIA] p.103-105

### 3.2 Méthode de gradient [DIM] *finie positive, l'algorithme itératif* p.208 → 212

**Théorème 28** Soient  $A$  une matrice symétrique définie positive,  $b \in \mathbb{R}^n$  et  $c \in \mathbb{R}$ . Alors les problèmes

Trouver  $x \in \mathbb{R}^n$  tel que  $Ax = b$

et

Trouver  $x \in \mathbb{R}^n$  tel que  $f(x) = \min_{y \in \mathbb{R}^n} f(y)$   
avec  $f(y) = \langle Ay, y \rangle - \langle b, y \rangle + c, \quad y \in \mathbb{R}^n$

sont équivalents.

**Définition 29** Pour une matrice  $A$  symétrique dé-

$$\begin{cases} x^0 \in \mathbb{R}^n, \quad r^0 = b - Ax^0 \\ x^{k+1} = x^k + \alpha_k r^k \\ r^{k+1} = r^k + \alpha_k Ar^k \\ \alpha_k = \frac{\|r_k\|^2}{\langle Ar^k, r^k \rangle} \end{cases}$$

est appelé méthode du gradient à pas optimal.

**Théorème 30** ♠ La méthode de gradient à pas optimal est convergente pour toute matrice symétrique définie positive.

**Lemme 31** ♠ Inégalité de Kantorovitch ♠  
Soient  $A$  une matrice symétrique définie positive, de valeurs propres  $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n$ . Alors, pour  $x \in \mathbb{R}^n$ , on a l'inégalité

$$\langle Ax, x \rangle \langle A^{-1}x, x \rangle \leq \frac{(\lambda_1 + \lambda_n)^2}{4\lambda_1\lambda_n} \|x\|^4$$

## Illustrations

| Opération élémentaire              | Multiplication par                            |                               |
|------------------------------------|-----------------------------------------------|-------------------------------|
| $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$ | $I_n + \lambda E_{i,j}$                       | Multiplication<br>à<br>gauche |
| $L_i \leftarrow \lambda L_i$       | $I_n + (1 - \lambda) E_{i,i}$                 |                               |
| $L_i \leftrightarrow L_j$          | $I_n - E_{i,i} - E_{j,j} + E_{i,j} + E_{j,i}$ |                               |
| $C_i \leftarrow C_i + \lambda C_j$ | $I_p + \lambda E_{j,i}$                       | Multiplication<br>à<br>droite |
| $C_i \leftarrow \lambda C_i$       | $I_p + (1 + \lambda) E_{i,i}$                 |                               |
| $C_i \leftrightarrow C_j$          | $I_p - E_{i,i} - E_{j,j} + E_{i,j} + E_{j,i}$ |                               |

Tableau 1 : Opérations élémentaires et matrices de transvections et dilatations

## Questions

**Exercice :**

*Solution :*

**Exercice :**

*Solution :*

**Exercice :**

*Solution :*