

Formes linéaires et dualité en dimension finie. Exemples et applications.

Mohamed NASSIRI

Une forme linéaire sur un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel E est une application linéaire de E dans $\mathbb{K}$. On peut en citer quelques-unes bien connues : la différentielle d'une fonction à valeurs réelles, le produit scalaire, la trace, etc.

En dimension finie, on a une totale dualité entre un espace E et l'ensemble de ses formes linéaires E^* . Par exemple, dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on peut même montrer que l'on a un isomorphisme entre $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}))^*$. Cette dualité est facilitée par les notions de "bases duales" et "antéduales". Un résultat plutôt amusant : on peut retrouver la formule de Taylor à partir de ces bases dans l'espace $\mathbb{R}_n[X] = \{P \in \mathbb{R}[X] \mid \deg P \leq n\}$.

On va pouvoir introduire plusieurs nouvelles notions. La simple définition des formes linéaires permet d'introduire la notion forte utile d'hyperplans, comme noyau de formes linéaires. Une nouvelle définition de l'orthogonalité va voir le jour et va nous permettre de caractériser les sous-espaces vectoriels comme des intersections d'hyperplans. La notion d'"application transposée" va nous permettre de lier les images et les noyaux des applications, mais également des résultats remarquables sur les sous-espaces stables.

Comme application, en calcul différentiel, et en introduisant la notion d'espace tangent, on a le théorème des extrémas liés qui permet de lier, via une forme linéaire, la différentielle d'une fonction g (qui caractérise une surface $S = \{x \mid g(x) = 0\}$) et la différentielle d'une fonction f à valeurs réelles dont on aimerait connaître les points critiques sur S .

Références

- [GRI] Algèbre linéaire 5e Edition, Joseph Grifone
[GOUag] Les maths en tête : Algèbre, Xavier Gourdon
[MADag] Leçons d'algèbre : préparation à l'oral de l'agrégation, Karine Madère
[FGNag1] Algèbre 1 Oraux X-ENS, Serge Francinou, Hervé Gianella et Serge Nicolas ♠
[BER] Calcul différentiel topologique élémentaire, Wolfgang Bertram ♠

Développements

Théorème des extrémas liés
De la dualité dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

1 Formes linéaires, espace dual 1.2 Hyperplans [GRI] p.82

1.1 Formes linéaires, espace dual [GOUag] p.126

Définition 1 On appelle forme linéaire sur E une application linéaire $\varphi : E \rightarrow K$

Exemple 2 • $\text{Tr} : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}, A \mapsto \text{Tr} A$
• $C([0, 1], \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}, f \mapsto \int_0^1 f(t)dt$

Définition 3 L'ensemble des formes linéaires $\mathcal{L}_K(E, K)$ est noté E^* est dit espace dual de E .

Remarque 4 Notation : Si $x \in E$ et $\varphi \in E^*$, on note parfois $\varphi(x) = \langle \varphi, x \rangle$.

Proposition 5 Soit E de dimension finie n , et $\varphi \in E^*, \varphi \neq 0$. On a :

$$\dim(\text{Ker} \varphi) = n - 1$$

Définition 6 $\text{Ker} \varphi$ est dit hyperplan de E déterminée par φ .

Exemple 7 • $\{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid \text{Tr} A = 0\}$ est un hyperplan.

• $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 3x + 2y + z = 0\}$ est un hyperplan.

Remarque 8 Géométriquement, on peut voir un système d'équations comme une intersection d'hyperplans.

2 Etude du dual

2.1 Base dual [GOUag] p.127

Définition 9 Soit $B = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E . Pour tout i , $1 \leq i \leq n$, la forme linéaire e_i^* définie sur B par $e_i^*(e_j) = 0$ si $i \neq j$, $e_i^*(e_i) = 1$, s'appelle forme linéaire coordonnée d'indice i .

Théorème 10 Soit $B = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E . Alors $B^* = (e_1^*, \dots, e_n^*)$ est une base de E^* appelée base duale de B , et donc $\dim E^* = \dim E$. Pour tout $\varphi \in E^*$, on a $\varphi = \sum_{i=1}^n \varphi(e_i) e_i^*$.

Application 11 Soit E un $\mathbb{K}$ -e.v., $\varphi_1, \dots, \varphi_p \in E^*$ et $\varphi : E \rightarrow \mathbb{K}^p$ définie par $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_p)$. Alors φ est surjectif si et seulement si $\varphi_1, \dots, \varphi_p$ sont linéairement indépendants.

2.2 Bidual et base antédual [GOUag] p.127

Théorème 12 Si $x \in E$, on note $\tilde{x} : E^* \rightarrow \mathbb{K}$, $\varphi \mapsto \varphi(x)$. On a $\tilde{x} \in E^{**}$ et l'application $f : E \rightarrow E^{**}$, $x \mapsto \tilde{x}$ est un isomorphisme.

Remarque 13 Cet isomorphisme est canonique. On convient alors d'identifier E et E^* en identifiant x à $\tilde{x}$ pour $x \in E$.

Proposition 14 Soit $(f_1, \dots, f_n)$ une base de E^* . Il existe une unique base $(e_1, \dots, e_n)$ de E telle que pour tout i , $e_i^* = f_i$.

Définition 15 Cette base s'appelle base antédual de $(f_1, \dots, f_n)$.

Application 16 Soient $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{R}_n[X] = \{P \in \mathbb{R}[X] \mid \deg P \leq n\}$ et $a \in \mathbb{R}$. $\forall k \in [0; n]$, on pose

$$\varphi_k : \mathbb{R}_n[X] \rightarrow \mathbb{R}, P \mapsto P^{(k)}(a)$$

$(\varphi_k)_{k \in [0; n]}$ est une base de $(\mathbb{R}_n[X])^*$ et $(\frac{(X-a)^j}{j!})_{j \in [0; n]}$ est la base antédual de $(\varphi_k)_{k \in [0; n]}$. Tout polynôme P de $\mathbb{R}_n[X]$ s'écrit $P = \sum_{i=1}^n \varphi_i(P) P_i$, soit

$$P = \sum_{i=1}^n P^{(i)}(a) \frac{(X-a)^i}{i!}$$

ce qui est exactement la formule de Taylor. [MAD] p.173

3 Orthogonalité

3.1 Définitions et premières propriétés [GOUag] p.128 → 129

Définition 17 • Des éléments $x \in E$ et $\varphi \in E^*$ sont dit orthogonaux si $\varphi(x) = \langle \varphi, x \rangle = 0$.

• Si $A \subset E$, on note $A^\perp = \{\varphi \in E^* \mid \forall x \in A, \varphi(x) = 0\}$. L'ensemble $A^\perp$ est un s.e.v. de E^* appelé orthogonal de A .

• Si $B \subset E^*$, on note $B^\circ = \{x \in E \mid \forall \varphi \in B, \varphi(x) = 0\}$. L'ensemble B° est un s.e.v. de E appelé orthogonal de B .

Remarque 18 Si $\varphi \in E^*$, alors $\{\varphi\}^\circ$ est le noyau de φ .

Proposition 19 • Si $A_1 \subset A_2 \subset E$, alors $A_2^\perp \subset A_1^\perp$.

• Si $B_1 \subset B_2 \subset E^*$, alors $B_2^\circ \subset B_1^\circ$.

Si $A \subset E$, alors $A^\perp = (\text{vect} A)^\perp$.

Si $B \subset E^*$, alors $B^\circ = (\text{vect} B)^\circ$.

Théorème 20 Soit E un $\mathbb{K}$ -e.v. de dimension finie. Alors :

(i) Si F est un s.e.v de E , $\dim F + \dim F^\perp = \dim E$ et $F^{\perp\circ} = F$.

(ii) Si G est un s.e.v de E^* , $\dim G + \dim G^\circ = \dim E$ et $G^{\circ\perp} = G$.

Remarque 21 Un sous-espace est égal à l'espace tout entier si et seulement si son orthogonal est nul.

Corollaire 22 Equations d'un s.e.v

Soit E un $\mathbb{K}$ -e.v de dimension finie n .

- Soient p formes linéaires $\varphi_1, \dots, \varphi_p$ de E^* telles que $\text{rg}(\varphi_1, \dots, \varphi_p) = r$. Le s.e.v $F = \{x \in E \mid \forall i, \varphi_i(x) = 0\}$ est de dimension $n - r$.

- Réciproquement, si F est un s.e.v de E de dimension q , il existe $n - q$ formes linéaires linéairement indépendantes $\varphi_1, \dots, \varphi_{n-q}$ telles que $F = \{x \in E \mid \forall i, 1 \leq i \leq n - q, \varphi_i(x) = 0\}$.

Proposition 23 Soit E un $\mathbb{K}$ -e.v de dimension finie et A_1 et A_2 deux s.e.v de E . Alors

(i) $(A_1 + A_2)^\perp = A_1^\perp \cap A_2^\perp$

(ii) $(A_1 \cap A_2)^\perp = A_1^\perp + A_2^\perp$

Soient B_1 et B_2 deux s.e.v de E^* . Alors

(iii) $(B_1 + B_2)^\circ = B_1^\circ \cap B_2^\circ$

(iv) $(B_1 \cap B_2)^\circ = B_1^\circ + B_2^\circ$

3.2 Orthogonalité et hyperplans [GOUag] p.129

Proposition 24 Soit $\varphi \in E^* \setminus \{0\}$. Alors $\text{Ker} \varphi$ est un hyperplan de E . Réciproquement, tout hyperplan de E est le noyau d'une forme linéaire non nulle.

Théorème 25 ♠ De la dualité dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ♠

• Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. L'application

$$f_A : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K} \\ X \mapsto \text{Tr}(AX)$$

induit un isomorphisme entre $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}))^*$

• Soit $f : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K}$ une forme linéaire telle que $f(XY) = f(YX)$, $\forall X, Y \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors $\exists \lambda \in \mathbb{K}$ tel que $f(X) = \lambda \text{Tr}(X)$.

• $\forall n \geq 2$, tout hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ rencontre $\text{GL}_n(\mathbb{K})$. [FGNag1] p.329 → 331

Proposition 26 Soit H un hyperplan de E . L'ensemble $H^\perp$ des formes linéaires sur E qui s'annulent sur H est une droite de E^* .

4 Applications transposées et extrémis liés

4.1 Applications transposées [GOUag] p.129 → p.130

Définition 27 Soient E et F deux $\mathbb{K}$ -e.v de dimension finie. Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$.

Pour tout $f \in E^*$, on a $f \circ u \in E^*$. L'application linéaire $F^* \rightarrow E^*$, $f \mapsto f \circ u$ est appelé application transposée de u et est notée ${}^t u$.

Proposition 28 Soient E et F deux $\mathbb{K}$ -e.v de dimension finie, on a :

- (i) $rg(u) = rg({}^t u)$
- (ii) $Im({}^t u) = (Ker(u))^\perp$
- (iii) $Ker({}^t u) = (Im(u))^\perp$

Proposition 29 Soient E, F, G trois $\mathbb{K}$ -e.v de dimension finie, $u \in \mathcal{L}(E, F)$, et $v \in \mathcal{L}(F, G)$. Alors ${}^t(v \circ u) = {}^t u \circ {}^t v$

Proposition 30 Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Un s.e.v F de E est stable par u si et seulement si $F^\perp$ est stable par ${}^t u$.

Proposition 31 On suppose que E et F sont de dimension finie et soient $\{e_i\}, \{\epsilon_j\}$ des bases de E et F respectivement, $\{\varphi_i\}, \{\psi_j\}$ leurs bases duales.

On note $A = Mat(u)_{e_i, \epsilon_j}$.

Alors $Mat({}^t u)_{\varphi_i, \psi_j} = {}^t A$. [GRI] p.95

4.2 Théorème des extrémis liés [BER] p.191 → 195

Définition 32 Soit $S \subset \mathbb{R}^n$ une partie et $p \in S$. Un vecteur $v \in \mathbb{R}^n$ est dit un vecteur tangent à S au point p s'il existe un intervalle non-vidé $I =]-\epsilon, \epsilon[$ et une courbe $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ de classe C^1 telle que

(i) $\gamma(0) = p, \gamma'(0) = v$;

(ii) $\gamma(I) \subset S$

L'ensemble des vecteurs tangents à S au point p est noté $T_p S$ et s'appelle l'espace tangent de S au point p .

Théorème 33 ♠ Théorème des extrémis liés ♠

Soit $S = \{x \in U \mid g(x) = d\}$, où $g : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ est de classe C^1 et $d \in W$. On suppose que, pour tout $x \in W$, $D_g(x)$ est surjective. Soit aussi $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 .

Si p est un point critique de $f|_S$, alors il existe une forme linéaire $\lambda : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ telle que

$$Df(p) = \lambda \circ Dg(p)$$

Autrement dit, pour tout $v \in \mathbb{R}^n$, nous avons $Df(p)(v) = \lambda(Dg(p)(v))$, ou encore, en écrivant $\lambda(x) = \sum_{i=1}^m \lambda_i x_i$: il existe $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R}$ (dits des multiplicateurs de Lagrange) tels que, pour tout $v \in \mathbb{R}^n$,

$$Df(p)(v) = \sum_{i=1}^m \lambda_i Dg_i(p)(v)$$

Questions

Exercice : Que peut-on dire de deux formes linéaires φ_1 et φ_2 qui s'annulent un même hyperplan H d'un espace E ?

Solution : Les formes φ_1 et φ_2 sont proportionnelles.

Soit D un supplémentaire de H dans E . D est donc une droite et on note a un générateur de cette droite. Ainsi tout vecteur $x \in E$ s'écrit $x = h + \gamma a$ (avec $h \in H$ et γ un scalaire). Par conséquent, on a :

$$\varphi_1(x) = \varphi_1(h + \gamma a) = \varphi_1(h) + \gamma \varphi_1(a) = \gamma \varphi_1(a) \text{ et } \varphi_2(x) = \gamma \varphi_2(a)$$

Comme $a \notin \text{Ker} \varphi_2$, on peut poser $\lambda = \frac{\varphi_1(a)}{\varphi_2(a)}$ et on a $\varphi_1 = \lambda \varphi_2$.

Exercice : Soit $H = \text{vect}\{(1, 2, 3); (-1, 2, 7)\}$ un hyperplan de $\mathbb{R}^3$. Trouver une forme linéaire $\varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $H = \text{Ker} \varphi$.

Solution :

Méthode 1 : Utilisation du produit vectoriel

Le produit vectoriel de deux vecteurs donne un vecteur normal à ces derniers. Ainsi

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ -10 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Donc l'équation du plan H engendré par les vecteurs $(1, 2, 3)$ et $(-1, 2, 7)$ est $8x - 10y + 4z = 0$. Ainsi, la forme linéaire recherchée est

$$\varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y, z) \mapsto 8x - 10y + 4z$$

Méthode 2 : Utilisation du déterminant

Si $(x, y, z) \in H$, alors la famille $(x, y, z), (1, 2, 3), (-1, 2, 7)$ est liée et donc

$$0 = \det((x, y, z), (1, 2, 3), (-1, 2, 7)) = 8x - 10y + 4z$$

On aboutit donc à la même conclusion.

Exercice : Dans $\mathbb{R}^4$, on considère les hyperplans suivants :

$$\begin{aligned} (H_1) &: x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ (H_2) &: 3x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 0 \end{aligned}$$

Donner la dimension de $H_1 \cap H_2$.

Solution : On pose

$$\begin{aligned} \varphi_1 : \mathbb{R}^4 &\rightarrow \mathbb{R}, (x_1, x_2, x_3, x_4) \mapsto x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \\ \varphi_2 : \mathbb{R}^4 &\rightarrow \mathbb{R}, (x_1, x_2, x_3, x_4) \mapsto 3x_1 - x_2 + x_3 + x_4 \end{aligned}$$

On a $\dim(H_1 \cap H_2) + \dim(H_1 \cap H_2)^\perp = \dim \mathbb{R}^4 = 4$. Comme φ_1 et φ_2 sont linéairement indépendantes, $\text{rg}(\varphi_1, \varphi_2) = 2$ et donc $\dim(H_1 \cap H_2)^\perp = 2$, et par suite $\dim(H_1 \cap H_2) = 4 - \dim(H_1 \cap H_2)^\perp = 2$

Exercice : Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ l'application linéaire dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 3 & -4 \\ -6 & -2 & 5 \\ 4 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Déterminer les plans stables par f .

Solution : Un plan P est stable par f si et seulement si $P^\perp$ est stable par ${}^t f$. Comme $\dim P = 2$, on a $\dim P^\perp = 1$. On est donc amené à chercher les droites stables par ${}^t f$ dont la matrice dans la base duale $(e_1^*, 2e_2^*, e_3^*)$ de la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est

$${}^t A = \begin{pmatrix} 7 & -6 & 4 \\ 3 & -2 & 2 \\ -4 & 5 & -1 \end{pmatrix}$$

On trouve $\text{Sp}({}^t A) = \{1, 2\}$. L'espace propre E_1 associé à la valeur propre 1 est dimension 1 avec $E_1 = \text{Vect}(a_1)$ où $a_1 = 4e_1^* + 2e_2^* - 3e_3^*$ et l'espace propre E_2 associé à la valeur propre 2 est dimension 2 avec $E_2 = \text{Vect}(a_2)$ où $a_2 = 2e_1^* + e_2^* - e_3^*$.

Par conséquent, les plans stables par f sont :

$$P_1 = E_1^\circ = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 4x + 2y - 3z = 0\}$$

et

$$P_2 = E_2^\circ = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x + y - z = 0\}$$