Endomorphismes trigonalisables. Endomorphismes nilpotents.

Mohamed NASSIRI

Comme pour la diagonalisation, le point de départ de notre affaire est la décomposition d'un espace E en somme de sous-espaces stables E_i sur lesquels un endomorphisme considéré u est "plus simple". L'avantage de la dimension finie est la description matricielle d'un endomorphisme (via le choix d'une base). Trigonaliser un endomorphsime, c'est donc trigonaliser sa matrice. On souhaite donc réaliser l'opération suivante :

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a_{n-1n} \\ a_{n1} & \dots & a_{nn-1} & a_{nn} \end{pmatrix} \xrightarrow{trigonalisation} \begin{pmatrix} a'_{11} & * & \dots & * \\ 0 & a'_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \dots & 0 & a'_{nn} \end{pmatrix}$$

On va donc être amené, comme pour la diagonalisation, à trouver des conditions sur les polynômes minimaux et caractéristiques pour trigonaliser la matrice d'un endomorphisme.

Une réduction moins fine : la réduction selon les sous-espaces caractéristiques, nous montre que l'étude des endomorphismes trigonalisables n'est pas dénué de sens.

Un autre type d'endomorphisme a également son importance : les endomorphismes nilpotents (*i.e.*) c'est un endomorphisme f tel qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ vérifiant $f^n = 0$.

La décomposition de Dunford de n'importe quelle matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ sous la forme $M = D + N$ avec $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ diagonalisable et $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ nilpotente (vérifiant en outre $DN = ND$), nous montre que l'étude des endomorphismes nilpotents n'est pas superflue.

Pour finir, une dernière réduction : la réduction de Jordan. Dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, toute matrice est semblable à une réduite de Jordan, qui est une matrice triangulaire obtenue à partir de matrices nilpotentes.

Cette réduction nous apporte également un résultat remarquable : l'ensemble des valeurs propres (avec leurs ordres) et les dimensions des blocs de Jordan associées à chaque valeur propre forment un système complet d'invariants.

Références

[GRI] Algèbre linéaire 5e Edition, Joseph Grifone
[GOUal] Les maths en tête : Algèbre, Xavier Gourdon
[AUL] Mathématiques : Algèbre et géométrie, Guy Auliac, Jean Delcourt et Rémi Goblot
[H2G2t1] Histoires hédonistes de groupes et de géométries - Tome 1, Philippe Caldero et Jérôme Germoni ♠

Développements

Théorème des polynômes annulateurs et Décomposition de Dunford
Convergence des méthodes itératives

Soit E un espace vectoriel de dimension finie n sur un corps K. On note $\mathcal{L}(E)$ l'ensemble des endomorphismes de E sur le corps K.

0 Résultats préliminaires

0.1 Eléments propres [GRI] p.155-156, 163-164

Définition 1 *Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Un vecteur $v \in E\backslash\{0\}$ est dit vecteur propre de f s'il existe $\lambda \in K$ tel que $f(v) = \lambda v$.*
Le scalaire λ est dit valeur propre correspondante à v.

Exemple 2 *Soit $k \in K$, et h_k l'homothétie de rapport k. Tout vecteur non nul de E est vecteur propre correspondant à la valeur propre k.*

Exemple 3 *Soit $r_{0,\theta}$ la rotation de centre 0 et d'angle $\theta \neq k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$). Dans ce cas, il n'y a pas de vecteurs propres et donc pas de valeurs propres.*

Définition 4 *Soit $\lambda \in K$. On note*

$$E_\lambda := \{v \in E \mid f(v) = \lambda v\}$$

E_λ est un sous-espace vectoriel de E dit espace vectoriel correspondant à λ.

Proposition 5 *Soient $\lambda_1, ..., \lambda_p$ des scalaires deux à deux distincts. Alors les espaces $E_{\lambda_1}, ..., E_{\lambda_p}$ sont en somme directe.*

0.2 Polynôme d'endomorphismes, polynôme minimal [AUL] p.86

Proposition-Définition 6 *Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. L'application*

$$\phi_f \ : \ K[X] \to \mathcal{L}(E)$$
$$P(X) = \sum_i a_i X^i \mapsto P(f) = \sum_i a_i f^i$$

est un morphisme de K-algèbres.
Le générateur unitaire de son noyau s'appelle polynôme minimal de f, et on le note $\pi_f(X)$.

Définition 7 *Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Un polynôme $Q(X) \in K[X]$ est dit annulateur de f si $Q(f) = 0$.*

Théorème 8 *Toute valeur propre est racine d'un polynôme annulateur.*

Proposition 9 *Lemme des noyaux*
Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ et $Q(X) = Q_1(X)...Q_p(X)$ un polynôme factorisé en produit de polynômes deux à deux premiers entre eux.
Si $Q(f) = 0$, alors

$$E = \mathrm{Ker}Q_1(f) \oplus ... \oplus \mathrm{Ker}Q_p(f)$$

[GRI] p.179-180

0.3 Polynôme caractéristique [GRI] p.157-158, 176 → 178

Définition 10 *Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. On appelle polynôme caractéristique de f, le polynôme*

$$\chi_f(X) := \det(f - X\mathrm{id})$$

Exemple 11 *Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, l'endomorphisme qui, dans la base canonique, est représenté par la matrice :*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$$

On a

$$\chi_f(X) := \det(f - X\mathrm{id}) = \begin{vmatrix} 1-X & 2 \\ -1 & 4-X \end{vmatrix} = (X-2)(X-3)$$

Théorème 12 *Théorème de Cayley-Hamilton*
Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Alors $\chi_f(f) = 0$.

Corollaire 13 *Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Alors $\pi_f(X)$ divise $\chi_f(X)$.*

1 Endomorphismes trigonalisables

1.1 Définition et caractérisations [GRI] p.153 → 174

Définition 14 *On dira que $f \in \mathcal{L}(E)$ est trigonalisable s'il existe une base (e_i) telle que*

$$M(f)_{e_i} = \begin{pmatrix} a_{11} & * & \dots & * \\ 0 & a_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \dots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Théorème 15 *$f \in \mathcal{L}(E)$ est trigonalisable si et seulement si son polynôme caractéristique est scindé (i.e.)*

$$\chi_f(X) = (-1)^n (X - \lambda_1)^{\alpha_1} ... (X - \lambda_p)^{\alpha_p}$$

avec $\lambda_1, ..., \lambda_p \in K$, et $\alpha_1 + ... + \alpha_p = n$

Corollaire 16 *Tout matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est semblable à une matrice triangulaire de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.*

Exemple 17 $A = \begin{pmatrix} -4 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ *est semblable à* $A' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

Corollaire 18 *Soit $A \in \mathcal{M}_n(K)$ et $\mathrm{Sp}A = \{\lambda_1, ..., \lambda_p\}$. On a alors*

$$\mathrm{Tr}A = \lambda_1 + ... + \lambda_p$$
$$\det A = \lambda_1 \times ... \times \lambda_p$$

1.2 Trigonalisation simultanée [GOUal] p.166 → 173

Proposition 19 *Soient $f, g \in \mathcal{L}(E)$ tels que $f \circ g = g \circ f$. Alors*
(i) Tout sous-espace propre de f est stable par g (en particulier $\mathrm{Ker}f$).
(ii) $\mathrm{Im}f$ est stable par g.

Théorème 20 *Trigonalisation simultanée*
Soient $f, g \in \mathcal{L}(E)$ trigonalisables et tels que $f \circ g = g \circ f$. Alors il existe une base commune de trigonalisation de f et g.
On dit alors que f et g sont cotrigonalisables.

Corollaire 21 *Soit $(f_i)_{i \in I}$ une famille d'endomorphismes de E trigonalisables et commutant deux à deux. Alors il existe une base commune de trigonalisation à tous les f_i.*

2 Endomorphismes nilpotents

2.1 Définition et indice de nilpotence [OBJ] p.168 → 170

Définition 22 *Un endomorphisme $f \in \mathcal{L}(E)$ est dit nilpotent s'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $f^n = 0$.*
On note $\mathcal{N}$ l'ensemble des endomorphismes nilpotents, et $\mathcal{N}_n(K)$ l'ensemble des matrices nilpotentes de taille n à coefficients dans K.

Exemple 23 *1) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice nilpotente. Alors l'endomorphisme*

$$\begin{aligned} \varphi_A \ : \ \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) &\to \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \\ M &\mapsto AM \end{aligned}$$

est lui aussi nilpotent.
2) La dérivation $P \to P'$ dans l'espace $k_n[X]$ des polynômes de degré inférieur ou égal à n est nilpotente.

Remarque 24 *$\mathcal{N}$ est un cône, mais n'est ni un idéal de $\mathcal{L}(E)$, ni un sous-espace vectoriel car il n'est pas stable par addition comme le montre l'exemple suivant*

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{\notin \mathcal{N}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\in \mathcal{N}} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{\in \mathcal{N}}$$

Définition 25 *On appelle indice de nilpotence l'entier p tel que*

$$p = \inf\{n \in \mathbb{N} \mid f^n = 0\}$$

2.2 Caractérisations [OBJ] p.169 → 171

Proposition 26 *Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Les propositions suivantes sont équivalentes :*
(i) f est nilpotent ;
(ii) $\chi_f(X) = (-1)^n X^n$;
(iii) il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $\pi_f(X) = X^p$ (p est l'indice de nilpotence) ;
(iv) f est trigonalisable avec des zéros sur la diagonale ;
(v) f est trigonalisable et sa seule valeur propre est 0 ;

Remarque 27 *La réciproque du point (v) est fausse quand f n'est pas trigonalisable comme le montre l'exemple de la matrice suivante :*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$$

n'est pas nilpotente alors que $\chi_A(X) = -X(X^2+1)$.

Proposition 28

$$\mathrm{vect}(\mathcal{N}) = \mathrm{Ker}(\mathrm{Tr}) = \{f \in \mathcal{L}(E) \mid \mathrm{Tr}(f) = 0\}$$

Proposition 29 *Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\mathrm{car}K = 0$, alors*

$$f \text{ est nilpotent} \Leftrightarrow \forall k \in \mathbb{N}^*, \ \mathrm{Tr}(u^k) = 0$$

3 Applications

3.1 Réduction selon les sous-espaces caractéristiques [GRI] p.184 → 188

Définition 30 *Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que son polynôme caractéristique $\chi_f(X) = (-1)^n(X-\lambda_1)^{\alpha_1}...(X-\lambda_p)^{\alpha_p}$ soit scindé. On appelle espace caractéristique associé à la valeur propre λ_i le sous-espace vectoriel*

$$N_{\lambda_i} = \mathrm{Ker}(f - \lambda_i \mathrm{id})^{\alpha_i}$$

Proposition 31 *Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que son polynôme caractéristique $\chi_f(X) = (-1)^n(X-\lambda_1)^{\alpha_1}...(X-\lambda_p)^{\alpha_p}$ soit scindé. Alors*
(i) $E = N_{\lambda_1} \bigoplus ... \bigoplus N_{\lambda_p}$
(ii) $E_{\lambda_i} \subset N_{\lambda_i}$ $\forall i \in \{1,...p\}$
(iii) $f(N_{\lambda_i}) \subset N_{\lambda_i}$ $\forall i \in \{1,...p\}$

Théorème 32 *Réduction selon les sous-espaces caractéristiques*
Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que son polynôme caractéristique $\chi_f(X) = (-1)^n(X-\lambda_1)^{\alpha_1}...(X-\lambda_p)^{\alpha_p}$ soit scindé. Alors il existe une base $\mathcal{B}$ de E, $\mathcal{B} = \{\mathcal{B}_1, ..., \mathcal{B}_p\}$ où $\mathcal{B}_i$ est une base de N_{λ_i} telle que

$$M(f)_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \boxed{M(f_{N_{|\lambda_1}})_{\mathcal{B}_1}} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \boxed{M(f_{N_{|\lambda_p}})_{\mathcal{B}_p}} \end{pmatrix}$$

avec $M(f_{N_{|\lambda_i}})_{\mathcal{B}_i} = \begin{pmatrix} \lambda_i & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_i \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{\alpha_i}(K)$

Exemple 33 $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ *a pour réduction selon les sous-espaces caractéristiques* $A' = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{matrix}} & 0 \\ 0 & \boxed{\begin{matrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{matrix}} \end{pmatrix}$

3.2 Décomposition de Dunford [GOUal] p.192-193

Théorème 34 ♠ *Théorème des polynômes annulateurs* ♠
Soit $f \in L(E)$ et $F \in \mathbb{K}[X]$ tel que $F(f) = 0$. Soit $F = \beta M_1^{\alpha_1} ... M_s^{\alpha_s}$ la décomposition de Dunford en facteurs irréductibles de $\mathbb{K}[X]$ du polynôme F. Pour tout i, on note $N_i = \mathrm{Ker} M_i^{\alpha_i}(f)$. On a alors $E = N_1 \bigoplus ... \bigoplus N_s$ et pour tout i, la projection sur N_i parallèlement à $\bigoplus_{j \neq i} N_j$ est un polynôme en f.

Théorème 35 ♠ *Décomposition de Dunford* ♠
Soit $f \in L(E)$ tel que son polynôme caractéristique χ_f soit scindé sur $\mathbb{K}$. Alors, il existe un unique couple (d, n) d'endomorphismes tel que :
(i) d est diagonalisable, n est nilpotente.
(ii) $f = n + d$ et $d \circ n = n \circ d$.
De plus, d et n sont des polynômes en f.

Proposition 36 *Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ tel que son polynôme minimal π_A soit scindé et $A = D + N$ la décomposition de Duford dans $\mathbb{C}$ de A. On considère l'application*

$$\varphi_A := [A, .] : \begin{array}{l} \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \\ M \mapsto AM - MA \end{array}$$

(i) Alors $\varphi_A = \varphi_D + \varphi_N$ est la décomposition de Duford de φ_A.
(ii) (A est diagonalisable) $\Leftrightarrow$ (φ_A est diagonalisable).

3.3 Réduction de Jordan [GRI] p.192 → 198

Définition 37 *On appelle bloc de Jordan une matrice carrée du type :*

$$J(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda \end{pmatrix}$$

Proposition 38 *Soit $J(\lambda)$ un bloc de Jordan d'ordre n, on a :*

$$\chi_J(X) = (-1)^n (X - \lambda)^n$$
$$\pi_J(X) = (X - \lambda)^n$$
$$\mathrm{dim} E_\lambda = 1$$

Théorème 39 (admis) *Théorème de Jordan*
Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que son polynôme caractéristique $\chi_f(X)$ soit scindé.
1) Supposons d'abord que f n'a qu'une seule valeur propre et que

$$\chi_J(X) = (-1)^n (X - \lambda)^n$$
$$\pi_J(X) = (X - \lambda)^\beta$$
$$\mathrm{dim} E_\lambda = \gamma$$

Alors il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que

$$M(f)_\mathcal{B} = \begin{pmatrix} \boxed{J_1(\lambda)} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \boxed{J_\gamma(\lambda)} \end{pmatrix} := \tilde{J}(\lambda)$$

où :
- les $J_k(\lambda)$ sont des blocs de Jordan,
- l'ordre du plus grand bloc est β,
- le nombre de blocs est γ.7

2) Si f admet les valeurs propres $\lambda_1, ..., \lambda_p$ de multiplicité $\alpha_1, ..., \alpha_p$ (i.e.)

$$\chi_f(X) = (-1)^n (X - \lambda_1)^{\alpha_1} ... (X - \lambda_p)^{\alpha_p}$$

Alors il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que

$$M(f)_\mathcal{B} = \begin{pmatrix} \overbrace{\boxed{\tilde{J}_1(\lambda)}}^{\alpha_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \underbrace{\boxed{\tilde{J}_\gamma(\lambda)}}_{\alpha_p} \end{pmatrix}$$

Exemple 40 *1) Soit* $\mathrm{dim} E = 5$ *avec*

$$\chi_f(X) = -(X - \lambda)^5$$
$$\pi_f(X) = (X - \lambda)^3,$$
$$\mathrm{dim} E_\lambda = 2$$

$$\text{Alors } M(f) = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{matrix}} & 0 \\ 0 & \boxed{\begin{matrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{matrix}} \end{pmatrix}$$

2) Soit $\mathrm{dim} E = 5$ *avec*

$$\chi_f(X) = -(X - \lambda)^5$$
$$\pi_f(X) = (X - \lambda)^3,$$
$$\mathrm{dim} E_\lambda = 3$$

$$\text{Alors } M(f) = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{matrix}} & 0 \\ 0 & \begin{matrix} \boxed{\lambda} & 0 \\ 0 & \boxed{\lambda} \end{matrix} \end{pmatrix}$$

Proposition 41 (admis) *Soient :*
- $n_p(\lambda)$: le nombre de blocs de Jordan d'ordre p pour la valeur propre λ,
- $K_p(\lambda)$: $\mathrm{Ker}(f - \lambda \mathrm{id})^p$
Alors

$$n_p(\lambda) = 2 \mathrm{dim} K_p(\lambda) - \mathrm{dim} K_{p-1}(\lambda) - \mathrm{dim} K_{p+1}(\lambda)$$

Corollaire 42 *Deux matrices $A, B \in \mathcal{M}_n(K)$, dont les polynômes caractéristiques sont scindés, sont semblables si et seulement si elles ont la même réduite de Jordan (à l'ordre des blocs près).*

Remarque 43 *L'ensemble des valeurs propres (avec leurs ordres) et les dimensions des blocs de Jordan associées à chaque valeur propre forment un système complet d'invariants.*

3.4 Exponentielle de matrices [ML3al] p.349-350

Définition 44 *L'application exponentielle matricielle* $\exp : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ *est définie, pour tout* $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$*, par la série convergente* $\exp(M) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} M^k$.

Proposition 45 *1) L'application* $\exp : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ *est continue.*
2) Soient $M, N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ *telles que* $MN = NM$*, alors* $\exp(M+N) = \exp(M)\exp(N)$
3) Pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$*,* $\exp(M) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ *et* $(\exp(M))^{-1} = \exp(-M)$*.*

Proposition 46 *1) Pour tout* $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ *et tout* $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$*, on a* $\exp(PMP^{-1}) = P\exp(M)P^{-1}$*.*
2) Si $\Delta = \mathrm{diag}(x_1, ..., x_n)$*, alors* $\exp(\Delta) = \mathrm{diag}(e^{x_1}, ..., e^{x_n})$
3) Si Δ *est triangulaire supérieure avec pour diagonale* $\mathrm{diag}(x_1, ..., x_n)$*, alors* $\exp(\Delta)$ *est triangulaire supérieure avec pour diagonale* $\mathrm{diag}(e^{x_1}, ..., e^{x_n})$*.*
4) Pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$*, on a* $\det(\exp(M)) = \exp(\mathrm{Tr}(M))$*.*
5) Pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$*, on a* ${}^t(\exp(M)) = \exp({}^tM)$*.*
6) Pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$*, on a* $\overline{\exp(M)} = \exp(\overline{M})$*.*
7) Si $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ *est nilpotente, alors* $\exp(N)$ *est unipotente.*

Proposition 47 *Décompositions de Duford :*
Si $M = D + N$ *est la décomposition de Duford additive dans* $\mathbb{C}$ *de* $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$*, alors*
(i) $\exp(M) = \exp(D)\exp(N)$ *est la décomposition de Duford multiplicative de* $\exp(M)$*,*
(ii) $\exp(M) = \exp(D) + \exp(D)(\exp(N) - I_n)$ *est la décomposition de Duford additive de* $\exp(M)$*.*

Proposition 48 *Soit* $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$*.*
(i) M *est diagonalisable* $\Leftrightarrow e^M$ *est diagonalisable.*
(ii) $e^M = I_n \Leftrightarrow \mathrm{sp}(M) \subset 2i\pi\mathbb{Z}$*.*

Exercice : Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) de dimension finie notée n, et f un endomorphisme nilpotent d'indice p.
Montrer qu'il existe un vecteur x de E tel que la famille $(x, f(x), ..., f^{p-1}(x))$ soit libre.

Solution : Par définition de l'indice de nilpotence, on a $f^{p-1} \neq 0$. Il existe donc $x \in E$ tel que $f^{p-1}(x) \neq 0$.

Montrons que la famille $(u^k(x))_{0 \leq k \leq p-1}$ est libre :

Soit $(\alpha_k)_{0 \leq k \leq p-1} \in \mathbb{K}^p$ tel que $\sum_{k=0}^{p-1} \alpha_k f^k(x) = 0$. Supposons qu'au moins un des α_k ne soit pas nul, et considérons $k_0 = \min\{k \in 0, ..., p-1\}/\alpha_k \neq 0$. Alors

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{p-1} \alpha_k f^k(x) = 0 &\Rightarrow \sum_{k=k_0}^{p-1} \alpha_k f^k(x) = 0 \\ &\Rightarrow f^{p-1-k_0}(\sum_{k=k_0}^{p-1} \alpha_k f^k(x)) = 0 \\ &\Rightarrow \sum_{k=k_0}^{p-1} \alpha_k f^{p-1-k_0+k}(x) = 0\end{aligned}$$

Or pour $k > k_0 + 1$, $p - 1 - k_0 + k > p$ et donc $f^{p-1-k_0+k} = 0$. Ainsi, il reste

$$\alpha_{k_0} f^{p-1}(x) = 0 \Rightarrow \alpha_{k_0} = 0 \quad \text{car } f^{p-1}(x) \neq 0$$

On obtient donc une contradiction avec la définition de k_0. Donc tous les coefficients α_k sont nuls et par conséquent, la famille $(u^k(x))_{0 \leq k \leq p-1}$ est libre.

Exercice : Soit E un espace vectoriel de dimension finie n sur un corps K. On note $\mathcal{N}$ l'ensemble des endomorphismes nilpotents. Montrer que

$$\text{vect}(\mathcal{N}) = \text{Ker}(\text{Tr}) = \{f \in \mathcal{L}(E) \mid \text{Tr}(f) = 0\}$$

Solution : L'inclusion $\mathcal{N} \subset \text{Ker}(\text{Tr})$ est évidente car si $f \in \mathcal{N}$, alors la seule valeur propre de f est 0 et donc $\text{Tr}(f) = 0$. Par conséquent, $f \in \text{Ker}(\text{Tr})$, et par suite, $\text{vect}(\mathcal{N}) \subset \text{Ker}(\text{Tr})$.

Pour obtenir l'égalité $\text{vect}(\mathcal{N}) = \text{Ker}(\text{Tr})$, on va montrer que $\dim(\text{vect}(\mathcal{N})) = \dim(\text{Ker}(\text{Tr}))$.
L'application Tr est une forme linéaire non nulle sur $\mathcal{L}(E)$, son noyau est donc de dimension $n^2 - 1$.
Il nous suffit donc de trouver une famille libre de $n^2 - 1$ éléments de $\mathcal{N}$.

Considérons la matrice

$$N = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

et construisons les matrices $A_k \in \mathcal{M}_n(K)$, pour $k \in [\![1, n-1]\!]$ telles que

$$A_k = (a_{i,j}^{(k)})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} \qquad a_{k,k}^{(k)} = a_{k+1,k}^{(k)} = 1 \qquad a_{k,k+1}^{(k)} = a_{k+1,k+1}^{(k)} = -1$$

Remarque : Les matrices $A_k \in \mathcal{M}_n(K)$ sont construites à partir de la matrice nulle à laquelle on ajoute le bloc N sur la diagonale en le décalant successivement.
Par exemple, pour $n = 4$, on a :

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

La famille $\{E_{i,j}$ pour $i \neq j,\ A_k$ pour $k \in [\![1, n-1]\!]\}$ est une famille libre de $\mathcal{N}$ à $(n^2-n)+(n-1) = n^2-1$ éléments (pour démontrer la liberté de la famille, il suffit d'écrire une relation linéaire et regarder les relations sur la diagonale).

Exercice : Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie notée n. Pour $u, v \in End_{\mathbb{C}}(E)$, on pose

$$[u, v] = uv - vu \quad \text{(crochet de Lie de } u \text{ et } v)$$

Soit $f, g \in End_{\mathbb{C}}(E)$, et on suppose qu'il existe $\alpha \in \mathbb{C}^*$ tel que $[f, g] = \alpha f$.
1) Montrer que f est nilpotente.
2) Montrer que f et g sont cotrigonalisables.

Solution : 1) Montrons, par récurrence sur $p \in \mathbb{N}^*$, que $[f^p, g] = p\alpha f^p$.
Pour $p = 1$, il n'y a rien à faire.
Supposons l'égalité vraie au rang p et démontrons la au rang $p+1$:

$$\begin{aligned}
[f^{p+1}, g] = f^{p+1}g - gf^{p+1} &= f^p f g - g f^{p+1} \\
&= f^p(gf + \alpha f) - gf^p f \\
&= (f^p g - g f^p) f + \alpha f^{p+1} \\
&= p\alpha f^p f + \alpha f^{p+1} \\
&= (p+1)\alpha f^{p+1}
\end{aligned}$$

On a donc bien démontré par récurrence sur $p \in \mathbb{N}^*$, que $[f^p, g] = p\alpha f^p$.
Posons maintenant

$$\begin{aligned}
\phi_g \ : \ End_{\mathbb{C}}(E) &\to End_{\mathbb{C}}(E) \\
f &\mapsto [f, g]
\end{aligned}$$

ϕ_g est un endomorphisme de $End_{\mathbb{C}}(E)$ avec un nombre fini de valeurs propres (car E est de dimension finie). De plus, $\forall p \in \mathbb{N}^*$, $\phi_g(f^p) = p\alpha f^p$ avec $\alpha \neq 0$, ce qui revient à dire que $\forall p \in \mathbb{N}^*$, $p\alpha$ est valeur propre de ϕ_g (et vecteur propre f^p) et donc que ϕ_g a une infinité de valeurs propres et vecteurs propres (non nuls par définition) ... Absurde ! Par conséquent, il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $f^p = 0$. Donc f est nilpotente.

2) Bon ! Nous devons chercher une base commune de trigonalisation. Commençons donc par chercher un vecteur propre commun à f et g.

Remarquons déjà que $\mathrm{Ker} f$ est stable par g. En effet,

$$\forall x \in \mathrm{Ker} f, \ f(g(x)) = g(f(x)) + \alpha f(x) = 0.$$

Mais comme f est nilpotente, son noyau n'est pas réduit à 0. Par ailleurs, comme $\mathbb{C}$ est algébriquement, $g_{|\mathrm{Ker} f}$ admet au moins un vecteur propre y. Ce vecteur est également vecteur propre pour f car $y \in \mathrm{Ker} f$.

Maintenant, montrons par récurrence sur la dimension $n \in \mathbb{N}^*$ que f et g sont cotrigonalisables.
Pour $n = 1$, c'est évident.
Supposons le résultat au rang $n-1$ et montrons le au rang n.
L'idée ici va être de passer par les hyperplans (qui sont de dimension $n-1$, et où notre résultat est supposé vrai) et donc par les applications transposées.
La relation $fg - gf = \alpha f$ donne

$${}^t g {}^t f - {}^t f {}^t g = \alpha {}^t f$$

Donc, en appliquant le résultat précédent à ${}^t f$ et ${}^t g$, il existe donc un vecteur propre $y \in E^*$ commun à ${}^t f$ et ${}^t g$.
Par suite, l'orthogonal H de $\mathrm{vect}(x)$ dans E est donc un hyperplan stable par f et g. Comme $[f_{|H}, g_{|H}] =$

$\alpha f_{|H}$, d'après l'hypothèse de récurrence, il existe donc une base $\mathcal{B}$ de H dans laquelle $f_{|H}$ et $g_{|H}$ sont cotrigonalisables.
Pour finir, prenons $x \in E$ telle que $\mathcal{B}' = (\mathcal{B}, x)$ soit une base de E. Alors, on a

$$\mathrm{Mat}_{B'}(f) = \begin{pmatrix} & & & * \\ & \boxed{\mathrm{Mat}_B(f_{|H})} & & \vdots \\ & & & * \\ 0 & \dots & 0 & * \end{pmatrix}$$

avec $\mathrm{Mat}_B(f_{|H})$ qui est une matrice triangulaire supérieure d'ordre $n-1$. Par conséquent, la base $\mathcal{B}'$ trigonalise f. On procède de la même façon pour montrer que la base $\mathcal{B}'$ trigonalise également g.

Remarque : On peut également montrer que pour $f, g \in End_{\mathbb{C}}(E)$, tels qu'il existe α, $\beta \in \mathbb{C}^*$ tel que $[f,g] = \alpha f + \beta g$, alors f et g sont cotrigonalisables.
En effet, en posant $f' = f + \frac{\alpha}{\beta} g$, on a $[f', g] = \alpha f'$, et d'après la question précédente f' et g sont cotrigonalisables. Par conséquent, $f' - \frac{\alpha}{\beta} g = f$ et g sont aussi cotrigonalisables.