Endomorphismes diagonalisables en dimension finie.

Mohamed NASSIRI

Le point de départ de notre affaire est la décomposition d'un espace E en somme de sous-espaces stables E_i sur lesquels un endomorphisme considéré u est "plus simple". En particulier, si les $u_{|E_i}$ sont des homothéties, u est *diagonalisable*.

L'avantage de la dimension finie est la description matricielle d'un endomorphisme (via le choix d'une base). Diagonaliser un endomorphsime, c'est donc diagonaliser sa matrice.

La condition d'être une homothétie peut paraître très restrictive, voire utopique mais la densité des matrices diagonalisables $\mathcal{D}_n(\mathbb{C})$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et la décomposition de Dunford de n'importe quelle matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ sous la forme $M = D + N$ avec $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ diagonalisable et $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ nilpotente (vérifiant en outre $DN = ND$), nous montre que l'étude des endomorphismes diagonalisables n'est pas superflue.

Deux outils vont être importants : le polynôme caractéristique et le polynôme minimal. Des conditions simples sur ces polynômes vont nous donner des critères de diagonalisation, et le célèbre théorème de Cayley-Hamilton nous donne une relation de divisibilité entre ces deux polynômes.

Références

[GRI] Algèbre linéaire 5e Edition, Joseph Grifone
[GOUal] Les maths en tête : Algèbre, Xavier Gourdon
[AUL] Mathématiques : Algèbre et géométrie, Guy Auliac, Jean Delcourt et Rémi Goblot
[H2G2t1] Histoires hédonistes de groupes et de géométries - Tome 1, Philippe Caldero et Jérôme Germoni ♠

Développements

M est diagonalisable $\Leftrightarrow e^M$ est diagonalisable
Théorème des polynômes annulateurs et Décomposition de Dunford

Soit E un espace vectoriel de dimension finie n sur un corps K. On note $End_K(E)$ l'ensemble des endomorphismes de E sur le corps K.

0 Résultats préliminaires

0.1 Eléments propres [GRI] p.155-156, 163-164

Définition 1 *Soit $f \in End_K(E)$. Un vecteur $v \in E\backslash\{0\}$ est dit vecteur propre de f s'il existe $\lambda \in K$ tel que $f(v) = \lambda v$.*
Le scalaire λ est dit valeur propre correspondante à v.

Exemple 2 *Soit $k \in K$, et h_k l'homothétie de rapport k. Tout vecteur non nul de E est vecteur propre correspondant à la valeur propre k.*

Exemple 3 *Soit $r_{0,\theta}$ la rotation de centre 0 et d'angle $\theta \neq k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$). Dans ce cas, il n'y a pas de vecteurs propres et donc pas de valeurs propres.*

Définition 4 *Soit $\lambda \in K$. On note*

$$E_\lambda := \{v \in E \mid f(v) = \lambda v\}$$

E_λ est un sous-espace vectoriel de E dit espace vectoriel correspondant à λ.

Proposition 5 *Soient $\lambda_1, ..., \lambda_p$ des scalaires deux à deux distincts. Alors les espaces $E_{\lambda_1}, ..., E_{\lambda_p}$ sont en somme directe.*

0.2 Polynôme d'endomorphismes, polynôme minimal [AUL] p.86

Proposition-Définition 6 *Soit $f \in End_K(E)$. L'application*

$$\phi_f \;:\; K[X] \to End_K(E)$$
$$P(X) = \sum_i a_i X^i \mapsto P(f) = \sum_i a_i f^i$$

est un morphisme de K-algèbres.
Le générateur unitaire de son noyau s'appelle polynôme minimal de f, et on le note $\pi_f(X)$.

Définition 7 *Soit $f \in End_K(E)$. Un polynôme $Q(X) \in K[X]$ est dit annulateur de f si $Q(f) = 0$.*

Théorème 8 *Toute valeur propre est racine d'un polynôme annulateur.*

Proposition 9 *Lemme des noyaux*
Soit $f \in End_K(E)$ et $Q(X) = Q_1(X)...Q_p(X)$ un polynôme factorisé en produit de polynômes deux à deux premiers entre eux.
Si $Q(f) = 0$, alors

$$E = \mathrm{Ker}Q_1(f) \oplus ... \oplus \mathrm{Ker}Q_p(f)$$

[GRI] p.179-180

0.3 Polynôme caractéristique [GRI] p.157-158, 176 → 178

Définition 10 *Soit $f \in End_K(E)$. On appelle polynôme caractéristique de f, le polynôme*

$$\chi_f(X) := \det(f - X\mathrm{id})$$

Exemple 11 *Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, l'endomorphisme qui, dans la base canonique, est représenté par la matrice :*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$$

On a

$$\chi_f(X) := \det(f - X\mathrm{id}) = \begin{vmatrix} 1-X & 2 \\ -1 & 4-X \end{vmatrix} = (X-2)(X-3)$$

Théorème 12 *Théorème de Cayley-Hamilton*
Soit $f \in End_K(E)$. Alors $\chi_f(f) = 0$.

Corollaire 13 *Soit $f \in End_K(E)$. Alors $\pi_f(X)$ divise $\chi_f(X)$.*

1 Diagonalisation

1.1 Critère de diagonalisation [GRI] p.153 → 183

Définition 14 *On dira que $f \in End_K(E)$ est diagonalisable s'il existe une base (e_i) telle que*

$$M(f)_{e_i} = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Théorème 15 (I) *$f \in End_K(E)$ est diagonalisable si et seulement s'il existe une base de E formée de vecteurs propres.*

Théorème 16 (II) *Soient $f \in End_K(E)$ et $\lambda_1, ..., \lambda_p$ les valeurs propres de f. Alors les propositions suivantes sont équivalentes :*
(i) f est diagonalisable.
(ii) $E = E_{\lambda_1} \oplus ... \oplus E_{\lambda_p}$.
(iii) $\dim E = \dim E_{\lambda_1} + ... + \dim E_{\lambda_p}$

Corollaire 17 *Si f admet n valeurs propres deux à deux distinctes, alors f est diagonalisable.*

Proposition 18 *Soient $f \in End_K(E)$ et λ une valeur propre d'ordre α de f. Alors $\dim E_\lambda \leq \alpha$*

Théorème 19 (III) *Soit $f \in End_K(E)$. Alors f est diagonalisable si et seulement si :*
(i) $\chi_f(X)$ est scindé dans K (i.e.)

$$\chi_f(X) = (-1)^n (X-\lambda_1)^{\alpha_1} ... (X-\lambda_p)^{\alpha_p}$$

avec $\lambda_1, ..., \lambda_p \in K$, et $\alpha_1 + ... + \alpha_p = n$
(ii) Les dimensions des espaces propres sont maximales (i.e.) $\forall i \in \{1, ..., n\}$, $\dim E_{\lambda_i} = \alpha_i$

Exemple 20 • $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 3 & -4 & 12 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$ *est diagonalisable.*
• $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ *est diagonalisable.*
• $A = \begin{pmatrix} -4 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ *n'est pas diagonalisable.*

Proposition 21 *Soient $f \in End_K(E)$ et $\chi_f(X) = (-1)^n (X-\lambda_1)^{\alpha_1} ... (X-\lambda_p)^{\alpha_p}$ son polynôme caractéristique. Alors, si f est diagonalisable, $Q(X) = (X-\lambda_1)...(X-\lambda_p)$ annule f.*

Théorème 22 (IV) *$f \in End_K(E)$ est diagonalisable si et seulement s'il existe un polynôme annulateur de f, scindé et n'ayant que des racines simples.*

Théorème 23 (V) *$f \in End_K(E)$ est diagonalisable si et seulement si son polynôme minimal est scindé et à racines simples.*

Exemple 24 • $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ *est diagonalisable.*
• $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ *n'est pas diagonalisable.*

1.2 Diagonalisation simultanée [GOUal] p.166 → 173

Proposition 25 *Soient $f, g \in End_K(E)$ tels que $f \circ g = g \circ f$. Alors*
(i) Tout sous-espace propre de f est stable par g (en particulier $\mathrm{Ker}f$).
(ii) $\mathrm{Im}f$ est stable par g.

Théorème 26 *Diagonalisation simultanée*
Soient $f, g \in End_K(E)$ diagonalisables et tels que $f \circ g = g \circ f$. Alors il existe une base commune de diagonalisation de f et g.
On dit alors que f et g sont codiagonalisables.

Corollaire 27 *Soit $(f_i)_{i\in I}$ une famille d'endomorphismes de E diagonalisables et commutant deux à deux. Alors il existe une base commune de diagonalisation à tous les f_i.*

Application 28 *Lemme de Schur*
Soit E un $\mathbb{C}$-e.v. de dimension finie. Soit $Q \subset End_{\mathbb{C}}(E)$ irréductible (c'est-à-dire que les seuls sous-espaces de E stables par tous les éléments de Q sont $\{0\}$ et E). Alors les seuls éléments commutant avec tous les éléments de Q sont les homothéties.

Remarque 29 *Si E est un $\mathbb{R}$-e.v. de dimension finie, le résultat est faux !*
Cependant, si dim*E est impair, le résultat reste vrai.*

1.3 Décomposition de Dunford [GOUal] p.192-193

Théorème 30 ♠ *Théorème des polynômes annulateurs* ♠
Soit $f \in L(E)$ et $F \in \mathbb{K}[X]$ tel que $F(f) = 0$. Soit $F = \beta M_1^{\alpha_1} ... M_s^{\alpha_s}$ la décomposition de Dunford en facteurs irréductibles de $\mathbb{K}[X]$ du polynôme F. Pour tout i, on note $N_i = KerM_i^{\alpha_i}(f)$. On a alors $E = N_1 \bigoplus ... \bigoplus N_s$ et pour tout i, la projection sur N_i parallèlement à $\bigoplus_{j\neq i} N_j$ est un polynôme en f.

Théorème 31 ♠ *Décomposition de Dunford* ♠
Soit $f \in L(E)$ tel que son polynôme caractéristique χ_f soit scindé sur $\mathbb{K}$. Alors, il existe un unique couple (d, n) d'endomorphismes tel que :
(i) d est diagonalisable, n est nilpotente.
(ii) $f = n + d$ et $d \circ n = n \circ d$.
De plus, d et n sont des polynômes en f.

Proposition 32 *Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ tel que son polynôme minimal π_A soit scindé et $A = D + N$ la décomposition de Duford dans $\mathbb{C}$ de A. On considère l'application*

$$\begin{aligned} \varphi_A \ := [A, .] :\ \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) &\to \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \\ M &\mapsto AM - MA \end{aligned}$$

(i) Alors $\varphi_A = \varphi_D + \varphi_N$ est la décomposition de Duford de φ_A.
(ii) (A est diagonalisable) $\Leftrightarrow$ (φ_A est diagonalisable).

1.4 Endomorphismes autoadjoints et normaux [GRI] p.252 $\to$ 254, p.286-287

Définition 33 *Un endomorphisme f d'un espace euclidien est dit autoadjoint si*

$$\langle f(x), y\rangle = \langle x, f(y)\rangle \quad \forall x, y \in E$$

En d'autres termes, f est autoadjoint si $f^* = f$.
Matriciellement, f est autoadjoint si et seulement si la matrice qui le représente dans une base orthonormée est symétrique.

Théorème 34 *Soit f un endomorphisme autoadjoint d'un espace euclidien. Alors :*
(i) f est diagonalisable.
(ii) Les sous-espaces propres de f sont deux à deux orthogonaux.

Corollaire 35 *Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Il existe alors $P \in O_n(\mathbb{R})$ telle que la matrice $A' =^t PAP$ soit diagonale.*

Remarque 36 *Les matrices symétriques complexes (non réelles) ne sont pas nécessairement diagonalisables (ni dans $\mathbb{R}$, ni dans $\mathbb{C}$). Par exemple, $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2i \end{pmatrix}$ est symétrique et non diagonalisable.*

Définition 37 *Un endomorphisme f d'un espace hermitien est dit normal si*

$$f^* \circ f = f \circ f^*$$

Matriciellement, f est normal si et seulement si la matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ qui le représente dans une base orthonormée est normale (${}^t\overline{A}A = A^t\overline{A}$).

Exemple 38 *En particulier sont normales, les matrices (anti)symétriques réelles, hermitiennes, orthogonales et unitaires.*

Théorème 39 *Soit f un endomorphisme normal d'un espace hermitien. Alors :*
(i) f est diagonalisable.
(ii) Les sous-espaces propres de f sont deux à deux orthogonaux.

Corollaire 40 *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ normale. Il existe alors $U \in U_n$ telle que la matrice $A' =^t \overline{U}AU$ soit diagonale (non nécessairement réelle).*

2 Un peu de topologie [H2G2t1] p.26 $\to$ 30

Théorème 41 *(i) $GL_n(\mathbb{C})$ est ouvert et dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C}$ et connexe par arcs.*
(ii) $GL_n(\mathbb{R})$ est ouvert et dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}$ a deux composantes connexes :

$$GL_n^+(\mathbb{R}) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R} \mid \det(M) > 0\}$$

$$GL_n^-(\mathbb{R}) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R} \mid \det(M) < 0\}$$

Application 42 *Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). Alors, AB et BA ont le même polynôme caractéristique.*

 CC BY NC SA

Proposition 43 *Soient $\mathcal{D}_n(\mathbb{C})$ l'ensemble des matrices diagonalisables de taille $n \times n$ et $\mathcal{M}_n^{\mathrm{reg}}(\mathbb{C})$ l'ensemble des matrices de taille $n \times n$ ayant n valeurs propres distinctes (matrices régulières). Alors, $\mathcal{M}_n^{\mathrm{reg}}(\mathbb{C})$ et, a fortiori, $\mathcal{D}_n(\mathbb{C})$, sont denses dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.*

Remarque 44 *On a une nouvelle démonstration (et plus rapide) du théorème de Cayley-Hamilton.*

3 Applications

3.1 Résolution d'un système de suites récurrentes [GRI] p.169

Exemple 45 *L'expression des suites (u_n) et (v_n) vérifiant*

$$\begin{cases} u_{n+1} = u_n - v_n \\ v_{n+1} = 2u_n + 4v_n \end{cases} \quad \textit{avec} \quad \begin{cases} u_0 = 2 \\ v_0 = 1 \end{cases}$$

est

$$\begin{cases} u_n = 5.2^n - 3.3^n \\ v_n = -5.2^n + 6.3^n \end{cases}$$

3.2 Système différentiel [GRI] p.170-171

Exemple 46 *Le système différentiel suivant*

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = x - y \\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = 2x + 4y \end{cases}$$

a pour solution

$$\begin{cases} x(t) = C_1 e^{2t} + C_2 e^{3t} \\ y(t) = -C_1 e^{2t} - 2C_2 e^{3t} \end{cases} \quad \textit{avec } C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

3.3 Exponentielle de matrices [ML3al] p.349-350

Définition 47 *L'application exponentielle matricielle* $\exp : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ *est définie, pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, par la série convergente* $\exp(M) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} M^k$.

Proposition 48 *1) L'application* $\exp : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ *est continue.*
2) Soient $M, N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telles que $MN = NM$, alors $\exp(M+N) = \exp(M)\exp(N)$
3) Pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\exp(M) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ *et* $(\exp(M))^{-1} = \exp(-M)$.

Proposition 49 *Décompositions de Duford :*
Si $M = D + N$ est la décomposition de Duford additive dans $\mathbb{C}$ de $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, alors
(i) $\exp(M) = \exp(D)\exp(N)$ *est la décomposition de Duford multiplicative de* $\exp(M)$,
(ii) $\exp(M) = \exp(D) + \exp(D)(\exp(N) - I_n)$ *est la décomposition de Duford additive de* $\exp(M)$.

Proposition 50 ♠ *Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.*
(i) M est diagonalisable $\Leftrightarrow$ e^M est diagonalisable.
(ii) $e^M = I_n \Leftrightarrow \mathrm{sp}(M) \subset 2i\pi\mathbb{Z}$. ♠

Questions

Exercice : Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ tel que son polynôme minimal π_A soit scindé et $A = D + N$ la décomposition de Duford dans $\mathbb{C}$ de A. On considère l'application

$$\begin{aligned} \varphi_A \ := [A, .] : \ \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) &\to \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \\ M &\mapsto AM - MA \end{aligned}$$

1) Montrer que $\varphi_A = \varphi_D + \varphi_N$ est la décomposition de Duford de φ_A.
2) Montrer que (A est diagonalisable) $\Leftrightarrow$ (φ_A est diagonalisable).

Solution : 1) • Montrons que $\varphi_D \circ \varphi_N = \varphi_N \circ \varphi_D$:
Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$,

$$\begin{aligned} \varphi_D(\varphi_N(M)) = \varphi_D(NM - MN) &= D(NM - MN) - (NM - MN)D \\ &= DNM - DMN - NMD - MND \quad \text{ or } ND = DN \\ &= NDM - DMN - NMD - MDN \\ &= NDM - NMD - DMN - MDN \\ &= N(DM - MD) - (DM - MD)N \\ &= \varphi_N(DM - MD) \\ &= \varphi_N(\varphi_D(M)) \end{aligned}$$

• Montrons que φ_D est diagonalisable :
Comme D est diagonalisable, alors l'application

$$\begin{aligned} \Psi_D \ : \ \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) &\to \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \\ M &\mapsto DM \end{aligned}$$

est diagonalisable. En effet, pour $P \in \mathbb{C}[X]$, $P(\Psi_D) = \Psi_{P(D)}$ car $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$,

$$\Psi_D^i(M) = \Psi_D^{i-1}(\Psi_D(M)) = \Psi_D^{i-1}(DM) = \Psi_D^{i-2}(\Psi_D(DM)) = \Psi_D^{i-2}(D^2M) = ... = D^iM = \Psi_{D^i}(M)$$

(et la linéarité de l'application Ψ_D permet de conclure).
En particulier, pour $P = \pi_D$, on a $\pi(\Psi_D) = \Psi_{\pi(D)} = 0$. Ainsi, Ψ_D est annulé par π_D qui est scindé à racines simples. Donc Ψ_D est diagonalisable.
De même, l'application

$$\begin{aligned} \Psi'_D \ : \ \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) &\to \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \\ M &\mapsto MD \end{aligned}$$

est diagonalisable. Par ailleurs, comme Ψ_D et Ψ'_D commutent, $\varphi_D = \Psi_D - \Psi'_D$ est diagonalisable.

• Montrons que φ_N est nilpotente :
Comme N est nilpotente (d'indice de nilpotence k), alors l'application

$$\begin{aligned} \Psi_N \ : \ \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) &\to \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \\ M &\mapsto NM \end{aligned}$$

est nilpotente. En effet, comme précédemment, $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $\Psi_N^k(M) = \underbrace{N^k}_{=0} M = 0$.

De même, l'application

$$\begin{aligned} \Psi'_N \ : \ \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) &\to \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \\ M &\mapsto MN \end{aligned}$$

 CC BY NC SA

est nilpotente. Par ailleurs, comme Ψ_N et Ψ'_N commutent, $\varphi_N = \Psi_N - \Psi'_N$ est nilpotente.

Conclusion : $\varphi_A = \varphi_D + \varphi_N$ est la décomposition de Duford de φ_A.

2) $\Rightarrow$: On a déjà démontré ce sens dans le deuxième point de la question précédente.

$\Leftarrow$: Soit $A = D + N$ la décomposition de Duford dans $\mathbb{C}$ de A, donc $\varphi_A = \varphi_D + \varphi_N$ est la décomposition de Duford de φ_A.
Ainsi, (φ_A est diagonalisable) $\Leftrightarrow \varphi_N = 0$. Or

$$\varphi_N = 0 \Leftrightarrow \forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}),\ NM = MN \overset{*}{\Leftrightarrow} \exists \lambda \in \mathbb{C},\ N = \lambda I$$

De plus, comme N est nilpotente, $N = 0$ et donc $A = D$ est diagonalisable.

Remarque * : Montrons que $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}),\ NM = MN \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{C},\ N = \lambda I$
Le sens $\Leftarrow$ est évident.

$\Rightarrow$: Soit $X \in \mathbb{C}^n \backslash \{0\}$, et M la matrice d'un endomorphisme u telle que $\mathrm{Ker} u = \mathrm{vect}(X)$. Par conséquent,

$$MNX = N \underbrace{MX}_{=0} = 0 \quad \Rightarrow \quad NX \subset \mathrm{vect}(X)$$

Ainsi, si N est la matrice d'un endormorphisme v, on vient de montrer que v stabilise toute droite de $\mathbb{C}^n$. Montrons donc que v est une homothétie (la matrice d'une homothétie est de la forme λI, avec $\lambda \in \mathbb{C}$).

Soit $(e_1, ..., e_n)$ une base de $\mathbb{C}^n$. Par hypothèse, $v(e_i) = \lambda_i e_i\ \forall i \in \{1, ..., n\}$ (car v stabilise toute droite de $\mathbb{C}^n$). Il suffit donc de montrer que $\lambda_1 = ... = \lambda_n$.
$\forall i \in \{1, ..., n\}$, $\exists \mu \in \mathbb{C}$ tel que

$$\begin{array}{c} v(e_1 + e_i) = \mu(e_1 + e_i) = \mu e_1 + \mu e_i \\ \| \\ v(e_1) + v(e_i) = \lambda_1 e_1 + \lambda_i e_i \end{array}$$

Comme la famille (e_1, e_i) est libre $\forall i \in \{1, ..., n\}$, on a donc $\lambda_1 = \mu = \lambda_i\ \forall i \in \{1, ..., n\}$. Par conséquent, v est une homothétie.

Exercice : Soit $\mathcal{M}_n^{\mathrm{reg}}(\mathbb{C})$ l'ensemble des matrices de taille $n \times n$ ayant n valeurs propres distinctes (matrices régulières).
Montrer que $\mathcal{M}_n^{\mathrm{reg}}(\mathbb{C})$ est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Solution : Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On peut donc trigonaliser M ($\mathbb{C}$ est algébriquement clos donc son polynôme caractéristique à n racines). Par conséquent, il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ telle que $T = PMP^{-1}$, où T est une matrice triangulaire supérieure.

L'idée va être de construire une suite de matrices de $\mathcal{M}_n^{\mathrm{reg}}(\mathbb{C})$ qui converge vers T. Allons-y !
Notons $\lambda_1, ..., \lambda_n$ les éléments diagonaux de T. Soit $k \in \mathbb{N}$, on pose

$$D_k := \begin{pmatrix} \alpha_1^{(k)} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \alpha_n^{(k)} \end{pmatrix}$$

telle que :
- $\alpha_1^{(k)} = 0$, et
- $\forall i \geq 2$, $|\alpha_i^{(k)}| < 2^{-k}$ et $\lambda_i + \alpha_i^{(k)} \neq \{\lambda_1 + \alpha_1^{(k)}, ..., \lambda_{i-1} + \alpha_{i-1}^{(k)}\}$.

Par conséquent, la suite $(T+D_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{M}_n^{\text{reg}}(\mathbb{C})$ converge vers T. De plus, l'application $A \mapsto P^{-1}AP$ étant continue, la suite $(P^{-1}(T+D_k)P)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{M}_n^{\text{reg}}(\mathbb{C})$ converge vers $P^{-1}TP = M$.
Conclusion : $\mathcal{M}_n^{\text{reg}}(\mathbb{C})$ est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.