

Déterminant. Exemples et applications.

Mohamed NASSIRI

Le déterminant est une caractérisation simple de la liberté algébrique d'une famille de vecteurs. En plus d'être l'unique forme alternée sur $\mathbb{R}^n$, on a une formule explicite pour le déterminant avec une somme portant sur $\sigma \in \mathcal{S}_n$.

Même si cette formule nous permet de démontrer que $\det(AB) = \det(BA)$ ou encore $\det({}^t A) = \det(A)$, elle n'est pas "top" dans la pratique. En effet, pour calculer un déterminant de taille 5×5 , on aura $|\mathcal{S}_5| = 120$ termes dans la somme ... Heureusement, on a une autre formule qui fait intervenir les *cofacteurs* de la matrices.

Tout en restant dans le calcul explicite de déterminant, on peut citer deux déterminants remarquables : le déterminant de Vandermonde et le déterminant circulant. Ce dernier joue un rôle important dans le développement "Suite de polygones".

Les applications sont variées : résolution des systèmes de Cramer, calcul de volumes dans $\mathbb{R}^n$, calcul de distances dans $\mathbb{R}^n$ avec les matrices de Gram, changement de variables en calcul intégral, etc.

Références

- [GRI] Algèbre linéaire 5e Edition, Joseph Grifone
[GOUan] Les maths en tête : Analyse, Xavier Gourdon
[GOUal] Les maths en tête : Algèbre, Xavier Gourdon
[ROU] Petit guide de calcul différentiel, François Rouvière ♠

Développements

Suite de polygones
Différentielle du déterminant

Dans toute la leçon, K est un corps commutatif et on note $A = (a_{ij}) = (c_1, \dots, c_n) \in \mathcal{M}_n(K)$

Exemple 2 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$

Remarque 3 Pour le développement des déterminants d'ordre 3, on a la règle de Sarrus.

1 Définitions et premières propriétés

1.1 Une définition par récurrence [GRI] p.103-104

Définition 1 Soit $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(K)$. On définit, par récurrence, une application $\det : \mathcal{M}_n(K) \rightarrow K$ de la manière suivante :

- Si $n = 1$, (i.e.) $A = (a)$, on pose $\det(A) = a$;
- Si $n > 1$, notons A_{ij} la matrice obtenue en supprimant la $i^{\text{ème}}$ ligne et la $j^{\text{ème}}$ colonne, on pose alors (puisque $A_{ij} \in \mathcal{M}_{n-1}(K)$) :

$$\det(A) = a_{11}\det(A_{11}) + \dots + (-1)^{k+1}a_{1k}\det(A_{1k}) + (-1)^{n+1}a_{1n}\det(A_{1n})$$

Le scalaire $\det(A)$ est dit déterminant de A et on note

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} := \det \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

1.2 Une formule explicite [GRI] p.113 → p.115

Proposition 4 Soit $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(K)$. Alors

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \epsilon(\sigma) a_{\sigma(1)1} \dots a_{\sigma(n)n}$$

Exemple 5 Pour $n = 3$, on a $\mathcal{S}_3 = \{\sigma_1 = Id, \sigma_2 = (1\ 2\ 3), \sigma_3 = (1\ 3\ 2), \tau_1 = (2\ 3), \tau_2 = (1\ 3), \tau_3 = (1\ 2)\}$ avec $\epsilon(\sigma_i) = 1$ et $\epsilon(\tau_i) = -1$ ($i = 1, 2, 3$).

$$\begin{aligned} \det(A) &= \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_3} \epsilon(\sigma) a_{\sigma(1)1} a_{\sigma(2)2} a_{\sigma(3)3} \\ &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} \\ &\quad + a_{31}a_{12}a_{23} - a_{11}a_{32}a_{23} \\ &\quad - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{21}a_{12}a_{33} \end{aligned}$$

Théorème 6 Soit $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(K)$. Alors

$$\det({}^t A) = \det(A)$$

1.3 Forme linéaire alternée [GRI] p.105 → p.115

Théorème 7 1) Le déterminant est une application linéaire par rapport à colonne.

2) Si deux colonnes sont égales, le déterminant est nul.

Corollaire 8 1) Si l'on échange entre elles deux colonnes, le déterminant change de signe.

2) Le déterminant ne change pas si à une colonne, on ajoute une combinaison linéaire des autres colonnes.

Proposition 9 Soit $\sigma \in \mathcal{S}_n$ et $A = (c_1, \dots, c_n) \in \mathcal{M}_n(K)$. Alors

$$\det(c_{\sigma(1)}, \dots, c_{\sigma(n)}) \epsilon(\sigma) \det(c_1, \dots, c_n)$$

Exemple 10

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \epsilon((1 \ 4 \ 2)(3 \ 5)) = -1$$

Théorème 11 Soit $A = (c_1, \dots, c_n) \in \mathcal{M}_n(K)$. Alors les vecteurs $c_1, \dots, c_n$ forment une base de K^n si et seulement si $\det(A) \neq 0$

Corollaire 12 Règle de "dualité" :

On a montré plus haut que $\det({}^t A) = \det(A)$, donc toutes les propriétés du déterminant relatives aux colonnes peuvent être affirmées pour les lignes.

2 Calcul des déterminants

2.1 Cofacteurs et mineurs

Définition 13 On appelle cofacteur de l'élément a_{ij} le scalaire

$$\text{cof}(a_{ij}) := (-1)^{i+j} \det(A_{ij})$$

où A_{ij} la matrice obtenue en supprimant la $i^{\text{ème}}$ ligne et la $j^{\text{ème}}$ colonne. [GRI] p.115

Exemple 14

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 2 & 4 & -2 \\ 5 & -1 & 3 \end{pmatrix}, \text{cof}(1) = + \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 10$$

[GRI] p.115

Théorème 15 Développement du déterminant selon la $j^{\text{ème}}$ ligne :

$$\det(A) = a_{j1} \text{cof}(a_{j1}) + \dots + a_{jn} \text{cof}(a_{jn})$$

Développement du déterminant selon la $j^{\text{ème}}$ colonne :

$$\det(A) = a_{1j} \text{cof}(a_{1j}) + \dots + a_{nj} \text{cof}(a_{nj})$$

[GRI] p.116

Définition 16 On appelle mineur d'ordre r de $A \in \mathcal{M}_n(K)$ le déterminant d'une matrice extraite de A obtenue en choisissant r lignes et r colonnes. [GRI] p.123

Exemple 17 Par exemple, en choisissant la ligne 2 et 3 et la colonne 2 et 4 de la matrice, on obtient le mineur δ comme suit :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 7 & 3 \\ 0 & \boxed{3} & 5 & \boxed{4} \\ 2 & \boxed{1} & 3 & \boxed{6} \end{pmatrix}, \delta = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 6 \end{vmatrix} = 14$$

[GRI] p.123

Théorème 18 Soit $A = (c_1, \dots, c_n) \in \mathcal{M}_n(K)$. Alors

$$\text{rg}(A) = r \leq n \Leftrightarrow \begin{cases} - & \text{il existe un mineur d'ordre } r \text{ non nul} \\ - & \text{tous les mineurs d'ordre } s > r \text{ sont nuls} \end{cases}$$

[GRI] p.127

Définition 19 $\forall k \in \{1, \dots, n\}$, on définit les mineurs principaux d'ordre k comme étant les déterminants $\det(M_k) = \det(a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq k}$. [GOUal] p.136

Théorème 20 Critère de Sylvester :

Soit $M = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in M_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique. Alors

M est définie positive si et seulement si $\forall k \in \{1, \dots, n\}$, $\det M_k > 0$. [GOUal] p.243-244

Application 21 $A = (\frac{1}{1+|i-j|})_{1 \leq i,j \leq n}$ est symétrique définie positive. [GOUal] p.245

2.2 Produits et inverse de matrices [GRI] p.119 → p.122

Théorème 22 Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(K)$. Alors

$$\det(AB) = \det A \det B$$

Corollaire 23 $A \in \mathcal{M}_n(K)$ est inversible si et seulement si $\det \neq 0$ et l'on a alors

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det A}$$

Corollaire 24 Si A et A' sont deux matrices semblables, alors $\det A = \det A'$

Définition 25 On appelle polynôme caractéristique de A , le polynôme $\chi_M(X) = \det(XI - M)$.

Remarque 26 Le déterminant étant défini pour les matrices à coefficients dans K et $K[X]$ étant intègre, on peut définir $\det(A - XI_n)$ au passant au corps des fractions de $K[X]$.

Proposition 27 Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(K)$. Alors

$$\chi_{AB} = \chi_{BA}$$

Proposition 28 Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Alors A et B sont semblables sur $\mathbb{R}$ si et seulement si elles sont semblables sur $\mathbb{C}$.

Définition 29 On appelle comatrice de A la matrice obtenue de A en remplaçant chaque élément par son cofacteur et elle est noté $\text{com}(A)$

Théorème 30 Soit $A \in \mathcal{M}_n(K)$, on a alors

$$A^t \text{com}(A) = {}^t \text{com}(A)A = (\det A)I_n$$

En particulier, si A est inversible, on a :

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} {}^t \text{com}(A)$$

Exemple 31 Si $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, avec $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$, on retrouve :

$$A^{-1} = \frac{1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{12} & a_{11} \end{pmatrix}$$

2.3 Exemples classiques [GOUal] p.137 & p.178-179

Proposition 32 Déterminant de Vandermonde :
Soit $(x_i)_{i=1\dots n} \in \mathbb{K}^n$. Alors

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & \dots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & \dots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i)$$

Application 33 Soient $a_1, \dots, a_n$ n éléments distincts de $\mathbb{R}$, et soient $b_1, \dots, b_n$ n éléments de $\mathbb{R}$. Alors il existe un unique polynôme P de degré inférieur ou égal à $n - 1$ tel que

$$P(a_i) = b_i, \quad i = 1 \dots n$$

Ce polynôme s'appelle le polynôme interpolateur de Lagrange relatif à la donnée $a_1, \dots, a_n$ et $b_1, \dots, b_n$. De plus, il a pour expression

$$P(X) = \sum_{i=1}^n b_i \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \frac{X - a_j}{a_i - a_j}$$

Proposition 34 Déterminant circulant :
Soit $(a_i)_{i=1\dots n} \in \mathbb{C}^n$

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ a_n & a_1 & \dots & a_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_2 & a_3 & \dots & x_1 \end{vmatrix} = \prod_{k=0}^{n-1} P(\omega^k)$$

où $P = \sum_{k=1}^n a_k X^{k-1}$ et ω une racine primitive n -ième de l'unité.

Application 35 ♠ Suite de polygones ♠

Soit $Z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n$ une suite d'affixes du plan complexe.

En notant, $Z_k = (z_{k,1}, \dots, z_{k,n})$, on définit par récurrence

$$Z_0 = Z \quad \text{et}$$

$$Z_{k+1} = \left(\frac{z_{k,1} + z_{k,2}}{2}, \dots, \frac{z_{k,n-1} + z_{k,n}}{2}, \frac{z_{k,n} + z_{k,1}}{2} \right)$$

Alors la suite $(Z_k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers l'isobarycentre des affixes $z_1, \dots, z_n$.

2.4 Matrices par blocs [GRI] p.134 → p.138

Proposition 36

$$\det \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline 0 & C \end{array} \right) = \det A \det C$$

avec $A \in \mathcal{M}_k(K)$ et $C \in \mathcal{M}_{n-k}(K)$.

Application 37 Soient M la matrice d'un endomorphisme u d'un $\mathbb{K}$ -e.v. E et F un sous-espace stable de u . Alors $\chi_{u|_F} = \chi_u$.

3 Régularité et topologie

3.1 Un peu de topologie dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

Proposition 38 L'application déterminant est continue sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Proposition 39 L'ensemble des matrices $\text{GL}_n(\mathbb{K})$ est un ouvert de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

Proposition 40 $\text{SL}_n(\mathbb{K}) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \mid \det M = 1\}$ est un fermé de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Proposition 41 $\text{GL}_n(\mathbb{C})$, $\text{SU}(n)$ et $\text{U}(n)$ sont connexes par arcs.

Proposition 42 Soit $1 \leq r \leq n$. L'ensemble $\{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \mid \text{rg} M \leq r\}$ est un fermé de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

Corollaire 43 $\overline{\{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \mid \text{rg} M = r\}} = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \mid \text{rg} M \leq r\}$

3.2 Plus de régularité [ROU]- p.74-75

Proposition 44 ♠ Différentielle du déterminant

L'application déterminant est de classe C^1 (même C^∞) sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\forall X, M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a :

$$D\det(X)(H) = \text{tr}({}^t\text{com}(X)H)$$

4 Applications

4.1 Système de Cramer [GRI] p.142-143

Définition 45 On appelle système de Cramer un système linéaire dont la matrice est carrée et inversible.

Théorème 46 Théorème de Cramer :

Un système de Cramer :

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

(avec $A = (a_{ij}) = (c_1, \dots, c_n)$ et $\det A \neq 0$) admet toujours une et une seule solution $\forall b = (b_1, \dots, b_n)$ donnée par les formules de Cramer :

$$x_i = \frac{\det(c_1, \dots, c_{i-1}, b, c_{i+1}, \dots, c_n)}{\det A}$$

4.2 Volumes [GRI] p.128 → p.131

Théorème 47 Soit $\mathcal{A}(u, v)$ l'aire du parallélogramme engendré par u et v . Alors

$$\mathcal{A}(u, v) = |\det(u, v)|$$

Théorème 48 Soit $\text{Vol}(v_1, \dots, v_n)$ le volume du parallélogramme engendré par $v_1, \dots, v_n$. Alors

$$\text{Vol}(v_1, \dots, v_n) = |\det(v_1, \dots, v_n)|$$

Proposition 49 Soient M la matrice d'un endomorphisme u d'un $\mathbb{K}$ -e.v. E et $\{v_1, \dots, v_n\}$ un système de n vecteurs. Alors

$$\det f := \det M = \frac{\det(f(v_1), \dots, f(v_n))}{\det(v_1, \dots, v_n)}$$

4.3 Matrices de Gram [GRI] p.258 & p.266

Définition 50 Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien et $\{v_1, \dots, v_p\}$ une famille ordonnée de vecteurs de E . On appelle matrice de Gram associée la famille $(v_1, \dots, v_p)$, la matrice

$$\text{Gram}(v_1, \dots, v_p) = \begin{pmatrix} \langle v_1, v_1 \rangle & \dots & \langle v_1, v_p \rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle v_p, v_1 \rangle & \dots & \langle v_p, v_p \rangle \end{pmatrix}$$

On note $G(v_1, \dots, v_p) = \det(\text{Gram}(v_1, \dots, v_p))$.

Théorème 51 Soient $\{v_1, \dots, v_p\}$ une famille libre de E , $F = \text{Vect}\{v_1, \dots, v_p\}$ et $x \in E$. Alors,

$$d(x, F)^2 = \frac{G(x, v_1, \dots, v_p)}{G(v_1, \dots, v_p)}$$

4.4 Changement de variables en analyse [GOUan] p.334-335

Théorème 52 (Admis) Théorème de changement de variables :

Soient U un ensemble mesurable compact de $\mathbb{R}^n$, et φ un C^1 -difféomorphisme de $\overset{\circ}{U}$ sur $\varphi(\overset{\circ}{U})$, tel que φ et son jacobien $J(\varphi)$ se prolonge continûment sur U . Alors $V = \varphi(U)$ un compact mesurable et pour toute fonction continue $f : V \rightarrow \mathbb{R}$, on a

$$\int_V f(v) dv = \int_U f(\varphi(u)) |J(\varphi)(u)| du$$

Corollaire 53 Passage en coordonnées polaires : Dans $\mathbb{R}^2$, on désigne par $(r, \theta) \in \mathbb{R}^+ \times [0, 2\pi]$ les coordonnées polaires et $(x, y) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$ les coordonnées cartésiennes.

Soit D (resp. Δ) un compact de $\mathbb{R}^2$ représenté en coordonnées cartésiennes (resp. coordonnées polaires). Alors,

$$\int_D f(x, y) dx dy = \iint_{\Delta} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr d\theta$$

Application 54 Calcul de l'intégrale de Gauss :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$$

Questions

Exercice : Donner le lien entre $P(X) = \sum_{i=0}^{n-1} a_i X^i \in \mathbb{R}[X]$ et $\chi_M(X) = \det(XI - M)$ avec

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \dots & \dots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots & 0 & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}$$

Solution :

$$\begin{aligned} \chi_M(X) = \det(XI - M) &= \begin{vmatrix} X & 0 & \dots & \dots & 0 & a_0 \\ -1 & X & \dots & \dots & 0 & a_1 \\ 0 & -1 & \ddots & \vdots & 0 & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & X & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & X + a_{n-1} \end{vmatrix} \\ &\text{en faisant } L_1 \leftarrow L_1 + XL_2 + X^2L_3 + \dots + X^{n-1}L_n \\ &= \begin{vmatrix} 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & P(X) \\ -1 & X & \dots & \dots & 0 & a_1 \\ 0 & -1 & \ddots & \vdots & 0 & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & X & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & X + a_{n-1} \end{vmatrix} \\ &\text{Developpement par rapport a la 1}^{\text{ere}} \text{ ligne} \\ &= (-1)^{n+1} P(X) \underbrace{\begin{vmatrix} -1 & X & \dots & \dots & 0 \\ 0 & -1 & \ddots & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & X \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -1 \end{vmatrix}}_{=(-1)^{n-1}} = P(X) \end{aligned}$$

Exercice : Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$. Montrer que A est inversible dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ si et seulement si $\det A \in \{\pm 1\}$

Solution : On sait que pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$, on a

$$A^t \text{com}(A) = {}^t \text{com}(A)A = (\det A)I_n$$

et par définition de la comatrice, si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$, alors ${}^t \text{com}(A) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$

$\Rightarrow$: Supposons A inversible dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$. Alors d'après le rappel, on a

$$\underbrace{A^{-1}}_{\in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})} = \frac{1}{\det A} \underbrace{{}^t \text{com}(A)}_{\in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})}$$

Pour que l'égalité soit donc vraie dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$, nécessairement $\det A \in \{\pm 1\}$.

$\Leftarrow$: Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ telle que $\det A \in \{\pm 1\}$. Donc, en particulier $\det A \neq 0$ et A est inversible dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{Q})$. Alors, on a l'égalité (dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{Q})$ a priori) :

$$A^{-1} = \underbrace{\frac{1}{\det A}}_{=\pm 1} \underbrace{{}^t \text{com}(A)}_{\in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})}$$

Par suite, $A^{-1} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ donc A inversible dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$.

Exercice : Montrer que, pour $1 \leq r \leq n$, $\{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \mid \text{rg} M \leq r\}$ est un fermé.
En déduire que $\overline{\{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \mid \text{rg} M = r\}} = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \mid \text{rg} M \leq r\}$

Solution : Soit $1 \leq r \leq n$.

- Montrons que $R_r^- := \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \mid \text{rg} M \leq r\}$ est un fermé.

Une matrice $M \in R_r^-$ vérifie que toutes ses matrices extraites de taille $s > r$ ont un déterminant nul. Soient $M_1, \dots, M_q$ sont les susdites matrices extraites de M . Alors,

$$R_r^- \Leftrightarrow \bigcap_{i=1}^q \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \mid \det M_i = 0\} = \bigcap_{i=1}^q f_i^{-1}(\{0\})$$

où les $f_i : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K}$, $M \mapsto \det M_i$ sont continues. Donc R_r^- est une intersection de fermés (comme image réciproque du fermé $\{0\}$ par les applications continues f_i).

Soit $R_r := \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \mid \text{rg} M = r\}$. Comme $R_r \subset R_r^-$ et que R_r^- est fermé, on a

$$\overline{R_r} \subset \overline{R_r^-} = R_r^-$$

- Montrons l'inclusion réciproque $R_r^- \subset \overline{R_r}$:

Soit $A \in R_r^-$. Alors, en notant $\text{rg} A = r' \leq r$, il existe $P, Q \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$ telles que

$$A = P \begin{pmatrix} I_{r'} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} Q$$

En posant, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$A_k = P \begin{pmatrix} I_{r'} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{k} I_{r-r'} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} Q$$

On a donc que (A_k) est une suite de R_r qui tend vers A et donc $A \in \overline{R_r}$.

Conclusion : $\overline{R_r} = \overline{\{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \mid \text{rg} M = r\}} = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \mid \text{rg} M \leq r\} = R_r^-$

Exercice : Montrer l'équivalence suivante : Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Alors A et B sont semblables sur $\mathbb{R}$ si et seulement si elles sont semblables sur $\mathbb{C}$.

Solution : $\Rightarrow$: Evident.

$\Leftarrow$: Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Alors il existe $P \in \text{GL}_n(\mathbb{C})$ telle que $AP = PB$.

Décomposons $P = C + iD$ avec $C, D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. D'où

$$\begin{aligned} A(C + iD) &= (C + iD)B \\ \Leftrightarrow \begin{cases} AC = CB & (L_1) \\ AD = DB & (L_2) \end{cases} \end{aligned}$$

On cherche donc $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $A(C + \lambda D) = (C + \lambda D)B$ (on obtient cette égalité en faisant $(L_1) + \lambda(L_2)$ et $C + \lambda D$ inversible.

Soit $\chi(X) = \det(C + XD) \in \mathbb{C}[X]$. On sait que $\chi(i) \neq 0$, donc la fonction polynomiale P n'est pas identiquement nulle sur $\mathbb{C}$ (et *a fortiori* sur $\mathbb{R}$) et donc il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\chi(\lambda) \neq 0$ (i.e.) $C + \lambda D$ est inversible et vérifie $A(C + \lambda D) = (C + \lambda D)B$. Donc A et B sont semblables sur $\mathbb{R}$.

Exercice : Soit $(a_i)_{i=1\dots n} \in \mathbb{C}^n$. Calculer le déterminant de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ a_n & a_1 & \dots & a_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_2 & a_3 & \dots & a_1 \end{pmatrix}$$

.

Solution : Considérons la matrice

$$J = \begin{vmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & & \ddots & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 \end{vmatrix}$$

On a donc $A = \sum_{i=1}^n a_i J^{i-1}$. Par conséquent, pour tout $Q \in \mathbb{C}[X] \setminus \{0\}$ et $\deg Q < n$, on a $Q(J) \neq 0$. Donc le polynôme minimal de J vérifie $\deg \Pi_J \geq n$, or $J^n - I = 0$, donc $\Pi_J = X^n - 1$. Et comme $\Pi_J | \chi_J$ avec $\deg \chi_J = n$, on a donc $\chi_J(X) = (-1)^n X^n - 1 = (-1)^n \prod_{k=0}^{n-1} (X - \omega^k)$ où $\omega = e^{\frac{2i\pi}{n}}$. J est donc diagonalisable, et il existe ainsi $Q \in \text{GL}_n(\mathbb{C})$ telle que :

$$QJQ^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \omega & & \\ & & \ddots & \\ & & & \omega^{n-1} \end{pmatrix}$$

On en déduit donc que

$$Q A Q^{-1} = Q P(J) Q^{-1} = P(Q J Q^{-1}) = \begin{pmatrix} P(1) & & & \\ & P(\omega) & & \\ & & \ddots & \\ & & & P(\omega^{n-1}) \end{pmatrix}$$

Donc $\det A = P(1)P(\omega)\dots P(\omega^{n-1}) = \prod_{k=0}^{n-1} P(\omega^k)$.