Exemples d'actions de groupes sur les espaces de matrices.

Mohamed NASSIRI

Un des premiers exemples d'actions de groupes sur les espaces de matrices est l'*action par translation*. Cette action va nous permettre de rappeler le lien entre les *opérations élémentaires* et les *matrices de dilatations et de transvections*. On donne également un bel exemple d'ensemble qui agit par translation sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$: l'ensemble $\mathcal{P}$ des matrices de permutation.

Pour $\sigma \in \mathcal{S}_n$, on appelle *matrice de permutation* une matrice de la forme $P_\sigma = (\delta_{i\sigma(j)})_{1\leq i,j\leq n}$(où δ_{ij} est le symbole de Kronecker). On montre même le joli résultat suivant : $\det P_\sigma = \epsilon(\sigma)$ (*i.e.*) le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{tikzcd} \mathcal{S}_n \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\phi"'] & \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \arrow[d, "\det"] \\ \{-1,1\} \arrow[r] & \mathbb{K}^* \end{tikzcd}$$

L'action de $\mathrm{GL}_m(\mathbb{K}) \times \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ sur $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ par équivalence nous permet d'avoir une nouvelle formulation du *théorème du rang*.

Quant à l'action de $\mathrm{O}_n(\mathbb{K})$ sur $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ (qui ressemble à une action par équivalence particulière) nous donne une version (plus faible) de la décomposition polaire.

L'action de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ sur $\mathcal{D}_n(\mathbb{C})$ par conjugaison nous ramène à une nouvelle description des *matrices semblables*. En notant $\mathcal{O}_A = \{B \in \mathcal{D}_n(\mathbb{C}) \mid \exists P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}),\ B = PAP^{-1}\}$, l'orbite de A sous l'action de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, et $\mathrm{Spec}(A)$, l'ensemble des valeurs propres de $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ prises avec multiplicités, on a la bijection

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_n(\mathbb{C})/\mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) &\to \mathbb{C}^n/\mathfrak{S}_n \\ \mathcal{O}_A &\mapsto \mathrm{Spec}(A) \end{aligned}$$

(en fait, $\mathcal{D}_n(\mathbb{C})/\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ et $\mathbb{C}^n/\mathfrak{S}_n$ sont même homéomorphes). On vient juste de montrer que le polynôme caractéristique ou le spectre (valeurs propres avec multiplicités) sont des invariaux totaux de similitude pour les matrices diagonalisables.

Pour finir, l'action de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ sur $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ par congruence nous permet d'avoir un résultat sur la classification des formes quadratiques (en se rappelant que la matrice d'une forme quadratiques est symétrique). Il s'agit d'une reformulation du *théorème de Sylvester* et de la *classification des formes quadratiques sur les corps finis*. En notant $\mathcal{O}_A = \{B \in \mathcal{S}_n(\mathbb{K}) \mid \exists P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}),\ B = PAP^*\}$, l'orbite de A sous l'action de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$, on a :

$\mathbb{K} = \mathbb{C}$ et $A, A' \in \mathcal{S}_n(\mathbb{C})$ $\mathcal{O}_A = \mathcal{O}_{A'} \Leftrightarrow \mathrm{rg}A = \mathrm{rg}A'$	$\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et $A, A' \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ $\mathcal{O}_A = \mathcal{O}_{A'} \Leftrightarrow \mathrm{rg}A = \mathrm{rg}A'$ et $\mathrm{sign}A = \mathrm{sign}A'$	$\mathbb{K} = \mathbb{F}_q$ et $A, A' \in \mathcal{S}_n(\mathbb{F}_q) \cap \mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_q)$ $\mathcal{O}_A = \mathcal{O}_{A'} \Leftrightarrow \delta(A) = \delta(A')$ où $\delta(A)$ est le déterminant de A modulo les carrés de $\mathbb{F}_q$

Références

[ML3al] Mathématiques L3 Algèbre, Aviva Szpirglas
[OBJ] Objectif Agrégation, Vincent Beck, Jérôme Malick et Gabriel Peyré
[DEL] Théorie des groupes 2e édition, Jean Delcourt
[PER] Cours d'algèbre, Daniel Perrin
[WAR] Mathématiques tout-en-un MPSI-PCSI, Claude Deschamps et André Warusfel
[H2G2t1] Histoires hédonistes de groupes et de géométries - Tome 1, Philippe Caldero et Jérôme Germoni

Développements

Décomposition polaire

Classification des formes quadratiques sur $\mathbb{F}_q$

0 Généralités sur les actions de groupe [ML3al] p.238 → 242

Dans cette section, G est un groupe et X un ensemble.

0.1 Définitions et premières propriétés

Définition 1 *On dit que G agit à gauche (resp. à droite) sur X si on a une application*

$$\begin{aligned} G \times X &\to X \\ (g,x) &\mapsto g.x \quad (\textit{resp. } x.g) \end{aligned}$$

telle que
(i) $\forall x \in X,\ 1.x = x \quad (\textit{resp. } x.1 = x)$
(ii) $\forall (g,g') \in G^2,\ \forall x \in X,\ g.(g'.x) = gg'.x \quad (\textit{resp. } (x.g).g' = x.gg')$

Remarque 2 *(i) Dans la suite, on considère les actions à gauche.*
(ii) Se donner une action de groupe, c'est se donner un morphisme Φ *défini par*

$$\begin{aligned} \Phi \ : \ G &\to \mathfrak{S}(X) \\ g &\mapsto \varphi_g \ : \begin{cases} X & \to X \\ x & \mapsto g.x \end{cases} \end{aligned}$$

Définition 3 *On dit que l'action est fidèle si*

$$(\forall x \in X,\ g.x = x) \Rightarrow g = 1$$

Elle est dite transitive si

$$(\forall x, y \in X, \exists g \in G \textit{ tel que } g.x = y)$$

Définition 4 *La relation*

$$x\mathcal{R}y \Leftrightarrow \exists g \in G \textit{ tel que } g.x = y$$

est une relation d'équivalence et ses classes sont appelées orbites de G sous X. L'orbite d'un élément $x \in X$ *est noté* $\omega(x)$.

Définition 5 *Le stabilisateur de x, noté* $\mathrm{Stab}(x)$, *est le sous-groupe de G défini par*

$$\mathrm{Stab}(x) = \{g \in G \mid g.x = x\}$$

On dit que x est un point fixe pour l'action de G si $\mathrm{Stab}(x) = G$.

Exemple 6 *Soit G un groupe (noté multiplicativement). La conjugaison :*

$$\begin{aligned} G \times G &\to G \\ (g,h) &\mapsto g.h = ghg^{-1} \end{aligned}$$

est une action de groupe.
Les orbites sont appelées classes de conjugaison et le stabilisateur de x est appelé centralisateur (noté $C_G(x)$*).*

0.2 Equation aux classes et formule de Burnside

Proposition 7 *Les orbites de X sous l'action de G forment une partition de X et il existe une bijection*

$$\begin{aligned} f_x \ : \ G\backslash \mathrm{Stab}(x) &\to \omega(x) \\ g\mathrm{Stab}(x) &\mapsto g.x \end{aligned}$$

De plus, l'action induite sur $\omega(x)$ *est compatible avec l'action naturelle de G sur le quotient* $G\backslash\mathrm{Stab}(x)$ *dans le sens suivant :*

$$\forall \kappa \in G\backslash\mathrm{Stab}(x),\ \forall g \in G, \quad f_x(g\kappa) = g.f_x(\kappa)$$

Corollaire 8 *Si G et X sont finis, alors* $\mathrm{Card}(\omega(x))$ *divise* $|G|$.

Proposition 9 *Equation aux classes*
On a l'égalité

$$|G| = |Z(G)| + \sum_i \mathrm{Card}(\omega_i)$$

où la somme porte sur toutes les classes de conjugaison de cardinal strictement supérieur à 1.

Proposition 10 *On suppose que G est un p-groupe et que X est fini. Soit*

$$X^G = \{x \in X \mid \forall g \in G,\ g.x = x\}$$

l'ensemble des points fixes de X sous l'action de G. Alors

$$\mathrm{Card}(X) \equiv \mathrm{Card}(X^G) \pmod p$$

Définition 11 *On pose, pour* $g \in G$,

$$\mathrm{Fix}(g) = \{x \in X \mid g.x = x\}$$

Remarque 12 *On a, par définition,*

$$X^G = \bigcap_{g \in G} \mathrm{Fix}(g)$$

Proposition 13 *Formule de Burnside*
On suppose G et X finis. Alors

$$\sum_{g \in G} \mathrm{Card}(\mathrm{Fix}(g)) = \sum_{x \in X} |\mathrm{Stab}(x)|$$

Le nombre d'orbites de X sous l'action de G, noté $\mathrm{Card}(\mathrm{Orb}_X(G))$, *est donné par la formule :*

$$\mathrm{Card}(\mathrm{Orb}_X(G)) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \mathrm{Card}(\mathrm{Fix}(g))$$

1 Action de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ par translation

1.1 Définition de l'action

Définition 14 *On définit l'action de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$) par translation par*

$$\begin{aligned}\mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \times \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) &\to \mathcal{M}_n(\mathbb{C})\\ (P, A) &\mapsto P.A = PA\end{aligned}$$

1.2 Opérations élémentaires [WAR] p.901 → 903

Dans cette section, A désigne une matrice de $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$

Définition 15 *On appelle opérations élémentaires sur les lignes* (resp. *colonnes*) *d'une matrice l'une des trois opérations suivantes :*
(i) addition d'un mutiple d'une ligne (resp. *colonne*) *à une autre ligne* (resp. *colonne*).
(ii) multiplication d'une ligne (resp. *colonne*) *par un scalaire non nul,*
(iii) échanges de deux lignes (resp. *colonnes*).

Remarque 16 *Etant donnés deux entiers distincts i et j compris entre 1 et n et $\lambda \in \mathbb{K}^*$, on convient des codages suivants :*
(i) addition de λL_j à la ligne L_i : $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$
(ii) multiplication de L_i par λ : $L_i \leftarrow \lambda L_i$
(iii) échange de L_i et L_j : $L_i \leftrightarrow L_j$
On utilise le même codage pour les colonnes en remplaçant L par C.

Proposition 17 *Deux matrices déduites l'une de l'autre par un nombre fini d'opérations élémentaires ont même rang.*

Définition 18 *On appelle matrice de transvection toute matrice de la forme $T_{ij}(\lambda) = I_n + \lambda E_{i,j}$ avec $i \neq j$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.*
On appelle matrice de dilatation toute matrice diagonale $D_i(\lambda) = I_n + (\lambda - 1)E_{i,i}$ avec $\lambda \in \mathbb{K}^*$

Proposition 19 *(i) Chaque opération élémentaire sur les lignes consiste en la multiplication à gauche par une matrice inversible.*
(ii) Chaque opération élémentaire sur les colonnes consiste en la multiplication à droite par une matrice inversible.

Remarque 20 *Plus précisement, on a le* Tableau 1 *et le résultat intéressant suivant*

Théorème 21 *L'ensemble des matrices de transvection engendre le groupe $\mathrm{SL}_n(\mathbb{K})$ et l'ensemble des matrices de transvection et de dilatation engendre le groupe $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$.*

1.3 Matrices de permutations [DEL] p.61→68

Définition 22 *Soit $\sigma \in \mathcal{S}_n$, on appelle matrice de permutation une matrice de la forme $P_\sigma = (p_{ij})$ où $p_{ij} = \delta_{i\sigma(j)}$ pour $1 \leq i, j \leq n$ (où δ_{ij} est le symbole de Kronecker).*

Proposition 23 *(i) L'ensemble $\mathcal{P}$ des matrices de permutation est un groupe isomorphe à $\mathcal{S}_n$.*
(ii) $\mathcal{P}$ agit par translation sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).

Exemple 24 *Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ que l'on note $M = (C_1\ C_2\ C_3) = \begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{pmatrix}$ et en considérant $\sigma = (123)$.*
Alors :

$$P_\sigma M = \begin{pmatrix} L_3 \\ L_1 \\ L_2 \end{pmatrix} \quad \text{et } MP_\sigma = (C_2\ C_3\ C_1)$$

Proposition 25 *Soit $\sigma \in \mathcal{S}_n$. Alors $\det P_\sigma = \epsilon(\sigma)$. En d'autres termes, le diagramme suivant est commutatif*

$$\begin{tikzcd} \mathcal{S}_n \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\phi"'] & \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \arrow[d, "\det"] \\ \{-1, 1\} \arrow[r] & \mathbb{K}^* \end{tikzcd}$$

[OBJ] p.188

2 Action de $\mathrm{GL}_m(\mathbb{K}) \times \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ sur $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ par équivalence [H2G2t1] p.4-5

Définition 26 *On définit l'action de $G := \mathrm{GL}_m(\mathbb{K}) \times \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ sur $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ par équivalence par*

$$\begin{aligned}G \times \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K}) &\to \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})\\ ((P, Q), A) &\mapsto (P, Q).A = PAQ^{-1}\end{aligned}$$

On dit que deux matrices $A, B \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ sont équivalentes si elles sont dans la même orbite pour l'action par équivalence.

Proposition 27 *Théorème du rang*
En notant

$$\mathcal{O}_A = \{B \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K}) \mid \exists (P, Q) \in G,\ B = PAQ^{-1}\}$$

l'orbite de A sous l'action de G, on a, pour tout $A, B \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$:

$$G.A = G.B \Leftrightarrow \mathrm{rg}A = \mathrm{rg}B$$

En particulier, les orbites sont paramétrées par le rang, entier compris entre 0 et $\min(n, m)$.

Théorème 28 *Soient $\mathcal{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et $m, n \in \mathbb{N}$. Pour r entiers vérifiant $0 \leq r \leq \min(m, n)$, on note $\mathcal{O}_r$ l'orbite des matrices de $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ de rang r. Alors*

$$\overline{\mathcal{O}_r} = \bigsqcup_{0 \leq k \leq r} \mathcal{O}_k$$

Corollaire 29 *L'unique orbite fermée est l'orbite de la matrice nulle, dite <u>minimale</u> : $\mathcal{O}_0 = \{0\}$.*
L'unique orbite ouverte est l'orbite dite <u>maximale</u> : $\mathcal{O}_{\min(m,n)}$. En particulier, si $m = n$, le groupe des matrices inversibles est ouvert dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Corollaire 30 *Soit $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de matrices de même rang r qui converge vers une matrice B. Alors $\mathrm{rg} B \leq r$.*

3 Action de $\mathrm{O}_n(\mathbb{K}) \times \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ sur $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$: Décomposition polaire [H2G2t1] p.202 → 204

Remarque 31 *On note $\mathrm{O}_n(\mathbb{C}) = \mathrm{U}_n$ pour plus de clareté.*

Définition 32 *On définit l'<u>action de $\mathrm{O}_n(\mathbb{K})\times \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ sur $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$</u> par*

$$\begin{aligned} \mathrm{O}_n(\mathbb{K}) \times \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) &\to \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \\ (O, M) &\mapsto O.M = MO^* \end{aligned}$$

Proposition 33 *L'orbite de $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ (resp. $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$) contient une unique matrice symétrique (resp. hermitienne) définie positive.*

Remarque 34 *En fait, on a mieux comme résultat. On peut démontrer le théorème suivant.*

Théorème 35 ♠ *<u>Décomposition polaire</u>* ♠
On a les homéomorphismes suivants :

$$\mathrm{O}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}),\ (O, S) \mapsto OS$$

$$\mathrm{U}_n \times \mathcal{H}_n^{++} \xrightarrow{\sim} \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}),\ (U, H) \mapsto UH$$

4 Action de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ sur $\mathcal{D}_n(\mathbb{C})$ par conjugaison [H2G2t1] p.84→86

Définition 36 *On définit l'<u>action de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ sur $\mathcal{D}_n(\mathbb{C})$ (ensemble des matrices diagonalisables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$) par conjugaison</u> par*

$$\begin{aligned} \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \times \mathcal{D}_n(\mathbb{C}) &\to \mathcal{D}_n(\mathbb{C}) \\ (P, A) &\mapsto P.A = PAP^{-1} \end{aligned}$$

On dit que deux matrices $A, B \in \mathcal{D}_n(\mathbb{C})$ sont <u>semblables</u> si elles sont dans la même orbite pour l'action par conjugaison.

Théorème 37 *En notant*

$$\mathcal{O}_A = \{B \in \mathcal{D}_n(\mathbb{C}) \mid \exists P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}),\ B = PAP^{-1}\}$$

l'orbite de A sous l'action de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, et $\mathrm{Spec}(A)$, l'ensemble des valeurs propres de $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ prises avec multiplicités, on a, pour tout $A \in \mathcal{D}_n(\mathbb{C})$, que l'application

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_n(\mathbb{C})/\mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) &\to \mathbb{C}^n/\mathfrak{S}_n \\ \mathcal{O}_A &\mapsto \mathrm{Spec}(A) \end{aligned}$$

est bien définie et bijective.

Remarque 38 *On peut même montrer que $\mathcal{D}_n(\mathbb{C})/\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ et $\mathbb{C}^n/\mathfrak{S}_n$ sont homéomorphes*

Corollaire 39 *Le polynôme caractéristique ou le spectre (valeurs propres avec multiplicités) sont des invariaux totaux de similitude pour les matrices diagonalisables.*

Remarque 40 *C'est faux pour le polynôme minimal (i.e.) en ne considérant que les valeurs propres sans multiplicités comme le montre les matrices suivantes*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Proposition 41 *Une matrice complexe A est diagonalisable si et seulement si son orbite $\mathcal{O}_A$ sous $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ est fermée dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.*

5 Action de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ sur $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ par congruence [H2G2t1] p.149→157

Définition 42 *On définit l'<u>action de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ sur $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ par congruence</u> par*

$$\begin{aligned} \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) &\to \mathcal{S}_n(\mathbb{K}) \\ (P, A) &\mapsto P.A = PAP^* \end{aligned}$$

On dit que deux matrices $A, B \in \mathcal{S}_n(\mathbb{C})$ sont <u>congrues</u> si elles sont dans la même orbite pour l'action par conjugaison.

Théorème 43 *En notant*

$$\mathcal{O}_A = \{B \in \mathcal{S}_n(\mathbb{K}) \mid \exists P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}),\ B = PAP^*\}$$

l'orbite de A sous l'action de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$, on a :
(i) Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, et $A, A' \in \mathcal{S}_n(\mathbb{C})$:

$$\mathcal{O}_A = \mathcal{O}_{A'} \Leftrightarrow \mathrm{rg} A = \mathrm{rg} A'$$

(ii) Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, et $A, A' \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$:

$$\mathcal{O}_A = \mathcal{O}_{A'} \Leftrightarrow \mathrm{rg} A = \mathrm{rg} A' \text{ et } \mathrm{sign} A = \mathrm{sign} A'$$

(iii) Si $\mathbb{K} = \mathbb{F}_q$, et $A, A' \in \mathcal{S}_n(\mathbb{F}_q)$ inversibles :

$$\mathcal{O}_A = \mathcal{O}_{A'} \Leftrightarrow \delta(A) = \delta(A')$$

où $\delta(A)$ est le déterminant de A modulo les carrés de $\mathbb{F}_q$.

Remarque 44 *Le point (ii) est une reformulation du théorème de Sylvester.*
Pour le point (iii), on a le petit raffinement suivant.

Théorème 45 *Soit $k = \mathbb{F}_q$ un corps fini de caractéristique différente de 2, et E un k-espace vectoriel de dimension n.*
Soit $\alpha \in \mathbb{F}_q^* \backslash \mathbb{F}_q^{*2}$. Il y a deux classes d'équivalences de formes quadratiques non dégénérées sur E, de matrices

$$Q_1 = I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et}$$

$$Q_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \alpha \end{pmatrix}$$

[PER] p.130

Définition 46 *(i) Pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, on pose*

$$\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}) := \mathcal{O}_{I_n} = \{P^tP \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \ ; \ P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})\}$$

Pour $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, on pose

$$\mathcal{H}_n^{++}(\mathbb{C}) := \mathcal{O}_{I_n} = \{PP^* \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \ ; \ P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})\}$$

Proposition 47 *(i) L'orbite de l'identité pour l'action de congruence réelle*

$$\{P^tP \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \ ; \ P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})\}$$

peut aussi s'écrire

$$\{S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \cap \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \mid \forall x \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}, \ {}^t xSx > 0\}$$

(ii) L'orbite de l'identité pour l'action de congruence complexe

$$\{PP^* \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \ ; \ P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})\}$$

peut aussi s'écrire

$$\{S \in \mathcal{H}_n(\mathbb{C}) \cap \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \mid \forall x \in \mathbb{C}^n \backslash \{0\}, \ x^*Sx > 0\}$$

Définition 48 *(i) Pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, on pose*

$$\mathrm{Stab}(I_n) := O_n(\mathbb{R}) = \{P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \mid P^tP = I_n\}$$

Pour $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, on pose

$$\mathrm{Stab}(I_n) := U(n) = \{P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \mid PP^* = I_n\}$$

Illustrations

Opération élémentaire	Multiplication par	
$L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$	$I_n + \lambda E_{i,j}$	Multiplication à gauche
$L_i \leftarrow \lambda L_i$	$I_n + (1-\lambda)E_{i,i}$	
$L_i \leftrightarrow L_j$	$I_n - E_{i,i} - E_{j,j} + E_{i,j} + E_{j,i}$	
$C_i \leftarrow C_i + \lambda C_j$	$I_p + \lambda E_{j,i}$	Multiplication à droite
$C_i \leftarrow \lambda C_i$	$I_p + (1+\lambda)E_{i,i}$	
$C_i \leftrightarrow C_j$	$I_p - E_{i,i} - E_{j,j} + E_{i,j} + E_{j,i}$	

Tableau 1 : Opérations élémentaires et matrices de transvections et dilatations

Questions

Exercice : Une matrice complexe A est diagonalisable si et seulement si son orbite $\mathcal{O}_A$ sous $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ est fermée dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Solution :

Rappel : On définit l'*action de* $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ *sur* $\mathcal{D}_n(\mathbb{C})$ (ensemble des matrices diagonalisables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$) *par conjugaison* par

$$\begin{aligned} \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \times \mathcal{D}_n(\mathbb{C}) &\to \mathcal{D}_n(\mathbb{C}) \\ (P, A) &\mapsto P.A = PAP^{-1} \end{aligned}$$

On dit que deux matrices $A, B \in \mathcal{D}_n(\mathbb{C})$ sont *semblables* si elles sont dans la même orbite pour l'action par conjugaison.

$\Rightarrow$: Supposons $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ diagonalisable. Soit $(B_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de matrices de $\mathcal{O}_A$ qui converge vers B. Montrons que $B \in \mathcal{O}_A$.
Soient $\lambda_1, ..., \lambda_r$ les valeurs propres distinctes de A. Par hypothèse, le polynôme minimal de A est

$$\mu(X) = \prod_{i=1}^{r} (X - \lambda_i)$$

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, B_k est semblable à A, et donc $\mu(B_k) = 0$. Comme l'application

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) &\to \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \\ M &\mapsto \mu(M) \end{aligned}$$

est continue, par passage à la limite, on obtient

$$\mu(B) = \lim_{k\to+\infty} \underbrace{\mu(B_k)}_{=0} = 0$$

Ainsi, B est annulé par un polynôme scindé à racines simples, donc B est diagonalisable.
Il faut encore montrer que $B \in \mathcal{O}_A$. Pour cela, il nous suffit de montrer qu'ils sont le même polynôme caractéristique. Or, par hypothèse, on a pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\chi(B_k) = \chi(A)$, et comme l'application

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) &\to \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \\ M &\mapsto \chi(M) \end{aligned}$$

est continue, par passage à la limite, on obtient

$$\chi(B) = \lim_{k\to+\infty} \underbrace{\chi(B_k)}_{=\chi(A)} = \chi(A)$$

D'où $B \in \mathcal{O}_A$.

$\Leftarrow$: Supposons $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est non diagonalisable, et montrons que $\mathcal{O}_A$ n'est pas fermée. On sait que A est semblable à une matrice triangulaire inférieure $T = (t_{ij})$. Pour $\epsilon > 0$, on pose la matrice

$$P_\epsilon = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \epsilon & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \epsilon^{n-1} \end{pmatrix}$$

Ainsi, on a

$$P_\epsilon T P_\epsilon^{-1} = (\epsilon^{i-j} t_{ij}) = \begin{pmatrix} t_{11} & 0 & \dots & 0 \\ \epsilon t_{21} & t_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ \epsilon^{2-n} t_{2n} & \dots & \epsilon t_{nn-1} & t_{nn} \end{pmatrix}$$

Par suite, la matrice $D := \lim\limits_{\epsilon\to 0} P_\epsilon T P_\epsilon^{-1}$ est diagonale. Ainsi $D \in \overline{\mathcal{O}_T} = \overline{\mathcal{O}_A}$ (car A et T sont semblables !), mais $D \notin \mathcal{O}_A$ car A n'est pas diagonalisable ! Ainsi, $\mathcal{O}_A$ n'est pas fermée.

Exercice : Soient $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et $m, n \in \mathbb{N}$. Pour r entiers vérifiant $0 \leq r \leq \min(m,n)$, on note $\mathcal{O}_r$ l'orbite des matrices de $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ de rang r. Montrer que

$$\overline{\mathcal{O}_r} = \bigsqcup_{0\leq k\leq r} \mathcal{O}_k$$

Solution : La clef de la preuve est la caractérisation du rang par les *mineurs* ! Soient $I \subset \{1, ..., m\}$ et $J \subset \{1, ..., n\}$ de <u>même cardinal</u>, le mineur d'indice I, J est l'application (continue)

$$\begin{aligned} \Delta_{I,J} : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) &\to \mathbb{K} \\ (a_{ij})_{\substack{1\leq i\leq m \\ 1\leq j\leq n}} &\mapsto \det(a_{ij})_{\substack{i\in I \\ j\in J}} \end{aligned}$$

Le rang d'une matrice A comme l'ordre du plus grand mineur non nul :

$$\mathrm{rg} A = \max\{r \in \mathbb{N},\ \exists I,\ \exists J,\ \mathrm{card} I = \mathrm{card} J = r \text{ et } \Delta_{I,J}(A) \neq 0\}$$

En notant $\mathcal{E} := \bigsqcup_{0\leq k\leq r} \mathcal{O}_k$, on va procéder par double inclusion.

<u>*- Montrons que $\overline{\mathcal{O}_r} \subset \mathcal{E}$:*</u>

$\mathcal{E}$ est un fermé de $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$. En effet, le rang d'une matrice est au plus r si et seulement si tous ses mineurs d'ordre supérieurs ou égaux à $r+1$ sont nuls (*i.e.*)

$$\mathcal{E} = \bigcap_{\mathrm{card} I = \mathrm{card} J \geq r+1} \Delta_{I,J}^{-1}(0)$$

Donc $\mathcal{E}$ est un fermé comme intersections de fermés (image réciproque du singleton $\{0\}$ par l'application continue $\Delta_{I,J}$).
Comme, par construction, $\mathcal{O}_r \subset \mathcal{E}$, on a donc $\overline{\mathcal{O}_r} \subset \overline{\mathcal{E}} = \mathcal{E}$.

<u>*- Montrons que $\mathcal{E} \subset \overline{\mathcal{O}_r}$:*</u>

Soit donc $A \in \mathcal{E}$ (donc une matrice de rang $k \leq r$). D'après le théorème du rang, il existe $(P, Q) \in \mathrm{GL}_m(\mathbb{K}) \times \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ telles que

$$A = P \begin{pmatrix} I_k & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} Q^{-1}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère la matrice

$$A_n = P \begin{pmatrix} I_k & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{n} I_{r-k} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} Q^{-1}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $A_n \in \mathcal{O}_r$, et on a

$$\lim_{n\to+\infty} A_n = A$$

Ainsi, $A \in \overline{\mathcal{O}_r}$, et donc $\mathcal{E} \subset \overline{\mathcal{O}_r}$.

