

# Représentations et caractères d'un groupe fini sur un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel. Exemples.

Mohamed NASSIRI

On considère un  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel  $V$  de dimension finie  $n$ . Une *représentation linéaire* d'un groupe  $G$  dans  $V$  est la donnée d'un morphisme  $\rho : G \rightarrow \text{GL}(V)$ . Par la suite, on s'intéresse à la *décomposition* des représentations dites *irréductibles* dans le sens suivant : si une représentation  $\rho$  de  $G$  sur  $V$  admet un sous-espace vectoriel  $W \subset V$  stable pour tous les  $\rho(g) \in \text{GL}(V)$ , elle induit une représentation  $\rho_W$  sur  $W$  appelée *sous-représentation*. Par la suite, une représentation sur un espace  $V$  est dite irréductible si elle admet exactement deux sous-représentations :  $\{0\}$  et  $V$  tout entier.

Parmi les représentations linéaires de groupes, l'exemple fondamentale est la représentation régulière. Plus précisément, la représentation régulière à gauche est la représentation d'un groupe  $G$  sur l'espace vectoriel  $\mathbb{C}[G]$  (espace vectoriel de dimension  $|G|$  sur  $\mathbb{C}$  dont la base est indexée par  $G$  et de la forme  $\{e_g\}_{g \in G}$ ) définie par le morphisme

$$\forall g \in G, \quad \rho(g) : \begin{cases} \mathbb{C}[G] & \rightarrow \mathbb{C}[G] \\ e_h & \mapsto e_{gh} \end{cases}$$

Cette représentation est importante, car dans sa décomposition, apparaissent toutes les représentations irréductibles d'un groupe  $G$ .

A partir d'une représentation  $\rho$  d'un groupe  $G$  sur un  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel  $V$  de dimension  $n$ , on lui associe son *caractère*  $\chi_\rho$  défini par  $\chi_\rho(g) = \text{tr}(\rho(g))$ , où  $\text{tr}$  désigne la trace. C'est une fonction de  $G$  dans  $\mathbb{C}$ , (*i.e.*)  $\chi_\rho \in \mathbb{C}[G]$ . Dans cet espace, on va poser un produit scalaire : si  $\varphi$  et  $\psi$  sont deux fonctions de  $G$  dans  $\mathbb{C}$ , on pose

$$\langle \varphi, \psi \rangle := \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \varphi(g) \overline{\psi(g)}$$

$\langle \cdot, \cdot \rangle$  est un produit hermitien sur l'espace vectoriel  $\mathbb{C}[G]$  des fonctions de  $G$  dans  $\mathbb{C}$ . Il se trouve que les caractères des représentations irréductibles d'un groupe  $G$  forment une famille orthonormée pour ce produit scalaire. En fait, on a mieux ! Les caractères sont des fonctions dites *centrales* : une fonction  $\varphi : G \rightarrow \mathbb{C}$  est dite centrale si elle vérifie

$$\forall g, h \in G, \quad \varphi(ghg^{-1}) = \varphi(h)$$

On note  $\mathbb{C}[G]^G$  l'ensemble des fonctions centrales : c'est un sous-espace vectoriel de l'espace  $\mathbb{C}[G]$ . Les caractères irréductibles forment une base orthonormée de l'espace des fonctions centrales ! On peut donc en déduire un résultat important de la théorie des représentations : le nombre de représentations irréductibles sur  $G$  non isomorphes est égal au nombre de classes de conjugaisons de  $G$ .

En notant  $\{C_1, \dots, C_p\}$  les différentes classes de conjugaison de  $G$  et en se donnant une famille de représentants  $(V_i)_{i=1}^p$  de l'ensemble des représentations irréductibles  $\rho_i := \rho_{V_i}$  sur  $G$  de caractères  $\chi_i$ , on appelle *table des caractères* le tableau constitué des éléments de la matrice  $(\chi_i(C_j))_{1 \leq i, j \leq p}$ .

|                       |             |               |          |               |
|-----------------------|-------------|---------------|----------|---------------|
|                       | 1           | $ C_1 $       | $\dots$  | $ C_p $       |
|                       | 1           | $C_1$         | $\dots$  | $C_p$         |
| $\chi_1 = \mathbb{1}$ | 1           | 1             | $\dots$  | 1             |
| $\chi_2$              | $\chi_2(1)$ | $\chi_2(C_2)$ | $\dots$  | $\chi_2(C_p)$ |
| $\vdots$              | $\vdots$    | $\vdots$      | $\ddots$ | $\vdots$      |
| $\chi_p$              | $\chi_p(1)$ | $\chi_p(C_2)$ | $\dots$  | $\chi_p(C_p)$ |

Une table des caractères est importante et permet d'avoir plusieurs informations sur un groupe : notamment les sous-groupes distingués à partir de la notion de *noyau de caractères*, etc. Mais une table de caractère ne détermine pas totalement une groupe. En effet, on peut montrer que le groupe des quaternions de norme 1,  $\mathbb{H}_8$ , et le groupe diédral  $D_4$  (d'ordre 8) ont la même table des caractères et pourtant ils ne sont pas isomorphes.

## Références

- [GOUal] Les maths en tête : Algèbre, Xavier Gourdon  
 [PEY] L'algèbre discrète de la transformée de Fourier, Gabriel Peyré  
 [OTZ] Exercices d'algèbre, Pascal Ortiz  
 [RAU] Les groupes finis et leurs représentations, Gérard Rauch  
 [H2G2t1] Histoires hédonistes de groupes et de géométries - Tome 1, Philippe Caldero et Jérôme Germoni ♠

## Développements

Table des caractères de  $\mathfrak{S}_4$  et les isométries du tétraèdre  
 Noyaux de caractères et sous-groupes distingués

## 1 Représentations linéaires de groupes

$\mathbb{C}[G]$  (espace vectoriel de dimension  $|G|$  sur  $\mathbb{C}$  dont la base est indexée par  $G$  et de la forme  $\{e_g\}_{g \in G}$ ) définie par le morphisme

### 1.1 Définitions et premières propriétés [PEY] p.194-195

$$\forall g \in G, \quad \rho(g) : \begin{cases} \mathbb{C}[G] & \rightarrow \mathbb{C}[G] \\ e_h & \mapsto e_{gh} \end{cases}$$

**Définition 1** Soit  $V$  un  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de dimension finie  $n$ . Une représentation linéaire d'un groupe  $G$  dans  $V$  est la donnée d'un morphisme  $\rho : G \rightarrow \text{GL}(V)$ . Ceci correspond à la donnée d'une action linéaire du groupe  $G$  sur  $V$  :

$$\begin{aligned} G \times V &\rightarrow V \\ (g, v) &\mapsto g.v = \rho(g)(v) \end{aligned}$$

**Définition 2** Une représentation  $\rho$  est dite fidèle si  $\rho$  est injective. On dit aussi que  $G$  agit fidèlement sur  $V$ .

**Exemple 3** Fort de l'isomorphisme  $\text{Is}(\Delta_4) \approx \mathfrak{S}_4$ , on peut établir une représentation du groupe  $\mathfrak{S}_4$  sur l'espace vectoriel  $\mathbb{R}^3$  comme un groupe de transformations orthogonales.

**Définition 4** On définit  $\mathbb{C}[G]$  l'espace vectoriel de dimension  $|G|$  sur  $\mathbb{C}$  dont la base est indexée par  $G$  et de la forme  $\{e_g\}_{g \in G}$ .

**Remarque 5** Pour  $g \in G$ , on note

$$\delta_g : \begin{cases} G & \rightarrow \mathbb{C} \\ h & \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } h = g \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{cases}$$

Par suite, pour une fonction  $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ , on a

$$f = \sum_{g \in G} f(g) \delta_g$$

Ce qui permet d'identifier  $\mathbb{C}[G]$  avec l'espace des fonctions de  $G$  sans  $\mathbb{C}$ .

### 1.2 Exemples fondamentaux [PEY] p.195 → 198

**Exemple 6** La représentation régulière à gauche est la représentation de  $G$  sur l'espace vectoriel

**Proposition 7** La représentation régulière est fidèle.

**Définition 8** Pour deux représentations  $\rho_V$  et  $\rho_W$  respectivement sur  $V$  et  $W$ , on définit une représentation somme  $\rho_{V \oplus W}$  par  $\forall g \in G, \forall (v, w) \in V \times W$ ,

$$\rho_{V \oplus W}(g)((v, w)) := \rho_V(g)(v) + \rho_W(g)(w)$$

**Définition 9** Pour deux représentations  $\rho_V$  et  $\rho_W$  respectivement sur  $V$  et  $W$ , on définit une représentation des morphismes  $\rho_{\mathcal{L}(V, W)}$  sur  $\mathcal{L}(V, W)$  par

$$\forall g \in G, \forall f \in \mathcal{L}(V, W),$$

$$\rho_{\mathcal{L}(V, W)}(g)(f) := \rho_W(g) \circ f \circ \rho_V(g^{-1})$$

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{f} & W \\ \rho_V(g) \downarrow & & \downarrow \rho_W(g) \\ V & \xrightarrow{\rho_{\mathcal{L}(V, W)}(g)} & W \end{array}$$

**Proposition 10** On définit bien ainsi une proposition.

**Définition 11** Pour une représentation  $\rho$  sur  $V$ , on définit une représentation duale  $\rho^*$  sur  $V^*$  le dual de  $V$  par

$$\forall g \in G, \quad \rho^*(g) := {}^t \rho(g^{-1})$$

où l'on a noté  ${}^t \phi \in \mathcal{L}(V^*)$  l'opérateur transposé de  $\phi \in \mathcal{L}(V)$ .

**Définition 12** On définit l'action de  $\mathfrak{S}_n$  sur  $\mathbb{C}[X_1, \dots, X_n]$  par

$$\begin{aligned} \mathfrak{S}_n \times \mathbb{C}[X_1, \dots, X_n] &\rightarrow \mathbb{C}[X_1, \dots, X_n] \\ (\sigma, P(X_1, \dots, X_n)) &\mapsto \sigma.P(X_1, \dots, X_n) \\ &= P(X_{\sigma(1)}, \dots, X_{\sigma(n)}) \end{aligned}$$

[GOUal] p.78

### 1.3 Représentations irréductibles [PEY] p.198 → 201

**Définition 13** • Soient  $\rho$  et  $\rho'$  deux représentations d'un même groupe  $G$  respectivement sur deux  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel  $V$  et  $V'$ . Un opérateur d'entrelacement est une application linéaire  $\tau : V \rightarrow V'$  tel que pour tout  $g \in G$ ,  $\tau \circ \rho(g) = \rho'(g) \circ \tau$

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{\tau} & V' \\ \rho(g) \downarrow & & \downarrow \rho'(g) \\ V & \xrightarrow{\tau} & V' \end{array}$$

- On note  $\text{Hom}_G(V, V')$  l'ensemble des opérateurs d'entrelacements.
- Deux représentations  $\rho$  et  $\rho'$  d'un même groupe  $G$  respectivement sur deux  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel  $V$  et  $V'$  sont dites isomorphes (ou  $G$ -isomorphes) si  $\tau$  est bijective.

**Définition 14** Si une représentation  $\rho$  de  $G$  sur  $V$  admet un sous-espace vectoriel  $W \subset V$  stable pour tous les  $\rho(g) \in \text{GL}(V)$ , elle induit une représentation  $\rho_W$  sur  $W$  appelée sous-représentation.

**Définition 15** Une représentation sur un espace  $V$  est dite irréductible si elle admet exactement deux sous-représentations :  $\{0\}$  et  $V$  tout entier.

**Définition-Proposition 16** Soit  $\rho$  une représentation de  $G$  sur  $V$ . Alors  $\rho$  laisse invariant le produit hermitien suivant :

$$\langle x, y \rangle_G := \sum_{g \in G} \langle \rho(g)(x), \rho(g)(y) \rangle$$

où  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  est un produit hermitien quelconque sur  $V$ . On dit alors que  $\rho$  est une représentation unitaire.

**Théorème 17** Théorème de Maschke  
Toute représentation peut s'écrire comme somme de représentations irréductibles.

### 1.4 Invariance et représentations [PEY] p.203 → 205

**Définition 18** Soit  $\rho$  une représentation sur  $V$ . On note

$$V^G = \{v \in V \mid \forall g \in G, \rho(g)(v) = g.v = v\}$$

C'est une sous-représentation de  $V$ .

**Exemple 19** En considérant l'action de  $\mathfrak{S}_n$  sur  $\mathbb{C}[X_1, \dots, X_n]$ , on dit qu'un polynôme  $P \in \mathbb{C}[X_1, \dots, X_n]$  est symétrique si  $P \in \mathbb{C}[X_1, \dots, X_n]^{\mathfrak{S}_n}$  (i.e.) si  $\forall \sigma \in \mathfrak{S}_n$ , on a

$$P(X_{\sigma(1)}, \dots, X_{\sigma(n)}) = P(X_1, \dots, X_n)$$

[GOUal] p.78

**Exemple 20** Dans le cas de la représentation des morphismes  $\rho_{\mathcal{L}(V, W)}$  sur  $\mathcal{L}(V, W)$  de deux représentations  $\rho_V$  et  $\rho_W$  respectivement sur  $V$  et  $W$ , on a  $\text{Hom}_G(V, V') = \mathcal{L}(V, W)^G$

**Proposition 21** Lemme de Schur :

Soient  $\rho$  et  $\rho'$  deux représentations irréductibles d'un groupe  $G$  respectivement sur deux  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel  $V$  et  $V'$  et  $f \in \mathcal{L}(V, V')$  un opérateur d'entrelacement. Alors

- (i) si  $\rho$  et  $\rho'$  ne sont pas isomorphes,  $f = 0$ .
- (ii) Si  $f \neq 0$ , alors  $f$  est un isomorphisme.

Si on suppose  $V = V'$ , alors  $f$  est une homothétie.

**Corollaire 22** On considère toujours deux représentations irréductibles d'un groupe  $G$  sur  $V$  et  $V'$ . On a donc

$$\dim(\text{Hom}_G(V, V')) = \begin{cases} 1 & \text{si } V \text{ et } V' \text{ sont} \\ & \text{isomorphes} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

## 2 Caractères

### 2.1 Définitions et premières propriétés [PEY] p.207-208

**Définition 23** Soit  $\rho$  une représentation d'un groupe  $G$  sur un  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel  $V$  de dimension  $n$ .

On lui associe son caractère  $\chi_\rho$  défini par  $\chi_\rho(g) = \text{tr}(\rho(g))$ , où  $\text{tr}$  désigne la trace.

C'est une fonction de  $G$  dans  $\mathbb{C}$ , (i.e.)  $\chi_\rho \in \mathbb{C}[G]$ .

**Proposition 24** (i)  $\chi_\rho(g)(1) = n$ .

(ii)  $\forall g \in G, \chi_\rho(g^{-1}) = \overline{\chi_\rho(g)}$ .

(iii)  $\forall g, h \in G, \chi_\rho(ghg^{-1}) = \chi_\rho(h)$  : on dit que  $\chi_\rho$  est une fonction centrale.

(iv) Si  $\rho$  se décompose en une somme directe de deux représentations  $\rho_V$  et  $\rho_W$ , alors  $\chi_\rho := \chi_V + \chi_W$

(v) Si on note  $\rho_{\mathcal{L}(V, W)}$  la représentation des morphismes sur  $\mathcal{L}(V, W)$  de deux représentations  $\rho_V$  et  $\rho_W$ , alors  $\chi_{\mathcal{L}(V, W)} = \overline{\chi_{\rho_V}} \chi_{\rho_W}$ .

(vi) Si on note  $\rho^*$  la représentation duale d'une représentation  $\rho$ , alors  $\chi_{\rho^*} = \overline{\chi_\rho}$ .

(vii) Deux représentations isomorphes ont même caractère.

**Exemple 25** Soit  $\rho_r$  la représentation régulière à gauche d'un groupe  $G$  sur un espace vectoriel de dimension  $|G|$  sur  $\mathbb{C}$  dont la base est indexée par  $G$  et de la forme  $\{e_g\}_{g \in G}$ . Alors

$$\chi_{\rho_r}(g) = \begin{cases} n & \text{si } g = 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

## 2.2 Relations d'orthogonalité [PEY] p.208-209

**Définition 26** Si  $\varphi$  et  $\psi$  sont deux fonctions de  $G$  dans  $\mathbb{C}$ , on pose

$$\langle \varphi, \psi \rangle := \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \varphi(g) \overline{\psi(g)}$$

$\langle \cdot, \cdot \rangle$  est un produit hermitien sur l'espace vectoriel  $\mathbb{C}[G]$  des fonctions de  $G$  sans  $\mathbb{C}$ .

**Proposition 27** Une famille de caractères de représentations irréductibles deux à deux non isomorphes forme une famille orthonormale de l'espace vectoriel des fonctions de  $G$  sans  $\mathbb{C}$  (i.e.)

(i) Si  $\chi$  est le caractère d'une représentation irréductible alors  $\langle \chi, \chi \rangle = 1$ . (ii) Si  $\chi$  et  $\chi'$  sont deux caractères de représentations irréductibles non isomorphes, alors on a  $\langle \chi, \chi' \rangle = 0$ .

## 2.3 Décomposition d'une représentation [PEY] p.209 → 211

Dans la suite, on se donne une famille de représentants  $(V_i)_{i=1}^p$  de l'ensemble des représentations irréductibles  $\rho_i := \rho_{V_i}$  sur  $G$ .

**Définition 28** On note  $\hat{G}$  l'ensemble  $(\rho_i)_{i=1}^p$  des représentations irréductibles sur  $G$ .

**Proposition 29** Soit  $\rho$  une représentation sur  $V$ , de caractère  $\chi_V$ . Alors elle se décompose en

$$V \underset{G\text{-iso.}}{\simeq} \bigoplus_{i=1}^p V_i^{\oplus a_i}$$

avec

$$a_i = \langle \chi_V, \chi_i \rangle$$

$$V_i^{\oplus a_i} = V_i \oplus \dots \oplus V_i \text{ (} a_i \text{ fois)}$$

De plus, on a

$$\langle \chi_V, \chi_V \rangle = \sum_{i=1}^p a_i^2$$

**Corollaire 30** Deux représentations sont isomorphes si et seulement si elles ont le même caractère.

De plus, une représentation sur  $V$  de caractère  $\chi_V$  est irréductible si et seulement si  $\langle \chi_V, \chi_V \rangle = 1$ .

**Proposition 31** On note  $\rho_r$  la représentation régulière d'un groupe  $G$  sur un espace vectoriel  $V$  de dimension  $n$  de caractère  $\chi_r$ . La décomposition de la représentation régulière sur  $V$  s'écrit

$$V \underset{G\text{-iso.}}{\simeq} \bigoplus_{i=1}^p V_i^{\oplus n_i}$$

avec  $n_i := \dim(V_i) = \langle \chi_r, \chi_i \rangle$

**Corollaire 32** On a les relations :

(i) Formule de Burnside :  $\sum_{i=1}^p n_i^2 = |G|$

(ii) Pour  $s \neq 1$ ,  $\sum_{i=1}^p n_i \chi_i(s) = 0$

## 2.4 Espace des fonctions centrales [PEY] p.213 → 215

**Définition 33** Une fonction  $\varphi : G \rightarrow \mathbb{C}$  est dite centrale si elle vérifie

$$\forall g, h \in G, \varphi(ghg^{-1}) = \varphi(h)$$

On note  $\mathbb{C}[G]^G$  l'ensemble des fonctions centrales : c'est un sous-espace vectoriel de l'espace  $\mathbb{C}[G]$ .

**Proposition 34** En notant  $\{C_1, \dots, C_q\}$  les différentes classes de conjugaison de  $G$ , les fonctions  $f_{C_1}, \dots, f_{C_q}$  définies par

$$\forall g \in G, f_{C_i}(g) = \begin{cases} 1 & \text{si } g \in C_i \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

forment une base de l'espace vectoriel  $\mathbb{C}[G]^G$ .

En particulier,  $\dim(\mathbb{C}[G]^G) = q$  (nombre de classes de conjugaisons de  $G$ )

**Théorème 35**  $(\chi_\rho)_{\rho \in \hat{G}} = (\chi_i)_{i=1}^p$  forme une base orthonormale de l'espace  $\mathbb{C}[G]^G$ .

**Corollaire 36** Le nombre de représentations irréductibles sur  $G$  non isomorphes est égal au nombre de classes de conjugaisons de  $G$ .

**Corollaire 37**  $G$  est abélien si et seulement si toutes ses représentations irréductibles sont de degré 1.

## 2.5 Noyau de caractères [PEY] p.230 → 232

**Proposition 38** Soit  $G$  un groupe fini et  $\rho : G \rightarrow \text{GL}(V)$  une représentation, de caractère  $\chi_V$  sur un espace  $V$  de dimension  $d$ . On note  $g \in G$  un élément d'ordre  $k$ . Alors :

(i)  $\rho(g)$  est diagonalisable.

(ii)  $\chi_V$  est somme de  $\chi_V(1) = \dim V = d$  racines  $k^{\text{ième}}$  de l'unité.

(iii)  $|\chi_V(g)| \leq \chi_V(1) = d$ .

(iv)  $K_{\chi_V} := \{g \in G \mid \chi_V(g) = \chi_V(1)\}$  est un sous-groupe distingué de  $G$ . On le nomme le noyau de la représentation.

**Proposition 39** Soient  $G$  un groupe fini, et  $\hat{G} = \{\rho_1, \dots, \rho_r\}$  son dual, formé de représentants des représentations irréductibles non isomorphes. Les sous-groupes distingués d'un groupe fini  $G$  sont exactement du type

$$\bigcap_{i \in I} \{g \in G \mid \chi_i(g) = \chi_i(e)\} \text{ où } I \subset \{1, \dots, r\}$$

**Corollaire 40**  $G$  est simple si et seulement si pour tout  $i \neq 1$ , pour tout  $g \in G \setminus \{e\}$ ,  $\chi_i(g) \neq \chi_i(e)$ .

### 3 Table des caractères

#### 3.1 Définitions et premières propriétés [PEY] p.225-226

**Définition 41** Une table des caractères est un tableau constitué des éléments de la matrice  $(\chi_i(C_j))_{1 \leq i, j \leq p}$ .

|                       | 1           | $ C_1 $       | $\dots$  | $ C_p $       |
|-----------------------|-------------|---------------|----------|---------------|
| $\chi_1 = \mathbb{1}$ | 1           | $C_1$         | $\dots$  | $C_p$         |
| $\chi_2$              | $\chi_2(1)$ | $\chi_2(C_2)$ | $\dots$  | $\chi_2(C_p)$ |
| $\vdots$              | $\vdots$    | $\vdots$      | $\ddots$ | $\vdots$      |
| $\chi_p$              | $\chi_p(1)$ | $\chi_p(C_2)$ | $\dots$  | $\chi_p(C_p)$ |

**Proposition 42** Orthogonalité des colonnes :  
En notant  $(\chi_i)_{i=1}^p$  les caractères irréductibles de  $G$  et  $(C_i)_{i=1}^p$  les classes de conjugaison de  $G$ , on a :

$$\sum_{i=1}^p \chi_i(C_k) \overline{\chi_i(C_l)} = 0 \text{ pour } k \neq l$$

#### 3.2 Les groupes cycliques [PEY] p.226

**Proposition 43** Soient  $G = \{1, g_0, g_0^2, \dots, g_0^{n-1}\}$  un groupe cyclique fini de cardinal  $n$  et de générateur  $g_0$  et  $\omega_n = e^{\frac{2i\pi}{n}}$ . Alors les éléments de  $\widehat{G}$  sont de la forme, pour  $l \in \{0, \dots, n-1\}$ ,

$$\chi_l : \begin{cases} G & \rightarrow \mathbb{C}^* \\ g = g_0^k & \mapsto (\omega_n^l)^k = e^{\frac{2ikl\pi}{n}} \end{cases}$$

En particulier,  $G \simeq \widehat{G}$ .

La table de  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  est une matrice de Vandermonde :

|           | 1        | 1                | $\dots$  | 1                       |
|-----------|----------|------------------|----------|-------------------------|
| $g_1 = 0$ | $g_1$    | $g_2$            | $\dots$  | $g_n$                   |
| $\chi_1$  | 1        | 1                | $\dots$  | 1                       |
| $\chi_2$  | 1        | $\omega_n$       | $\dots$  | $\omega_n^{n-1}$        |
| $\chi_3$  | 1        | $\omega_n^2$     | $\dots$  | $\omega_n^{2(n-1)}$     |
| $\vdots$  | $\vdots$ | $\vdots$         | $\ddots$ | $\vdots$                |
| $\chi_n$  | 1        | $\omega_n^{n-1}$ | $\dots$  | $\omega_n^{(n-1)(n-1)}$ |

#### 3.3 Les groupes diédraux [PEY] p.227-228

**Définition 44** On appelle groupe diédral  $D_n$  le groupe des isométries du plan qui conservent un polygone régulier à  $n$  côtés. Il contient  $n$  rotations d'angle  $\frac{k\pi}{n}$ ,  $k = 0, \dots, n-1$  ainsi que  $n$  symétries. En notant  $r$  la rotation d'angle  $\frac{2\pi}{n}$  et  $s$  une des symétries, on a

$$r^n = 1 \quad s^2 = 1 \quad (sr)^2 = 1$$

**Proposition 45** Les classes de conjugaison du groupe diédral  $D_n$  sont :

- Pour  $n$  est pair : on a  $\frac{n}{2} + 3$  classes de conjugaison

$$\{Id\}, \{-Id\}, \{r, r^{n-1}\}, \dots, \{r^{n/2-1}, r^{n/2+1}\}$$

$$\{s, sr^2, \dots, sr^{n-2}\}, \dots, \{sr, sr^3, \dots, sr^{n-1}\}$$

- Pour  $n$  est impair : on a  $\frac{n+1}{2} + 1$  classes de conjugaison

$$\{Id\}, \{r, r^{n-1}\}, \dots, \{r^{\frac{n-1}{2}}, r^{\frac{n+1}{2}}\}$$

$$\{s, sr, sr^2, \dots, sr^{n-1}\}$$

[OTZ] p.17

**Proposition 46** • Cas où  $n$  est pair :

On obtient les 4 représentations irréductibles de degré 1 suivantes

|          | $n$<br>$r^k$ | $n$<br>$sr^k$ |
|----------|--------------|---------------|
| $\chi_1$ | 1            | 1             |
| $\chi_2$ | 1            | -1            |
| $\chi_3$ | $(-1)^k$     | $(-1)^k$      |
| $\chi_4$ | $(-1)^k$     | $(-1)^{k+1}$  |

En posant  $\omega_n = e^{\frac{2i\pi}{n}}$ , pour  $h = 1, \dots, n/2$ , on a les représentations de degré deux définies par les formules suivantes

$$\rho_h(r^k) = \begin{pmatrix} \omega_n^{hk} & 0 \\ 0 & \omega_n^{-hk} \end{pmatrix} \quad \rho_h(s^k) = \begin{pmatrix} 0 & \omega_n^{-hk} \\ \omega_n^{hk} & 0 \end{pmatrix}$$

d'où

|          | $n$<br>$r^k$               | $n$<br>$sr^k$ |
|----------|----------------------------|---------------|
| $\chi_h$ | $2\cos(\frac{2\pi kh}{n})$ | 0             |

• Cas où  $n$  est impair :

On obtient les 2 représentations irréductibles de degré 1 suivantes

|          | $n$<br>$r^k$ | $n$<br>$sr^k$ |
|----------|--------------|---------------|
| $\chi_1$ | 1            | 1             |
| $\chi_2$ | 1            | -1            |

On a les mêmes représentations de degré deux pour  $h = 1, \dots, (n-1)/2$ .

#### 3.4 Le groupe $\mathfrak{S}_4$

**Théorème 47** ♠ Soient  $\Delta_4$  le tétraèdre régulier et  $Is(\Delta_4)$  le groupe des isométries préservant  $\Delta_4$ . Alors  $Is(\Delta_4)$  agit sur les sommets du tétraèdre, et on a

$$Is(\Delta_4) \approx \mathfrak{S}_4.$$

La table de caractères de  $\mathfrak{S}_4$  est voir Tableau 1 et Partie 3 ♠

[H2G2t1] p.363-364 - [PEY] p.228 → 230

### 3.5 Le groupe des quaternions $\mathbb{H}_8$ [RAU] p.60

$$\pm J = \pm \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \pm K = \pm i \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

**Théorème 48** *Le groupe des quaternions  $\mathbb{H}_8$  est formé des 8 matrices suivantes :*

$$\{\pm Id, \pm I = \pm i \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

*La table de caractères de  $\mathfrak{H}_8$  est voir Tableau 2*

**Remarque 49** *Il faut remarquer que  $\mathbb{H}_8$  et  $D_4$  ont la même table de caractères bien que  $\mathbb{H}_8$  et  $D_4$  ne soient pas isomorphes.*

## Illustrations

|                           | $Id$ | $\{(1\ 2)\}$ | $\{(1\ 2)(3\ 4)\}$ | $\{(1\ 2\ 3)\}$ | $\{(1\ 2\ 3\ 4)\}$ |
|---------------------------|------|--------------|--------------------|-----------------|--------------------|
|                           | 1    | 6            | 3                  | 8               | 6                  |
| $\chi_1 = \mathbb{1}$     | 1    | 1            | 1                  | 1               | 1                  |
| $\chi_2 = \epsilon$       | 1    | -1           | 1                  | 1               | -1                 |
| $\chi_3$                  | 3    | 1            | -1                 | 0               | -1                 |
| $\chi_4 = \epsilon\chi_3$ | 3    | -1           | -1                 | 0               | 1                  |
| $\chi_5$                  | 2    | 0            | 2                  | -1              | 0                  |

Tableau 1 : La table de caractères de  $\mathfrak{S}_4$

|                       | $Id$ | $-Id$ | $\{I\}$ | $\{J\}$ | $\{K\}$ |
|-----------------------|------|-------|---------|---------|---------|
|                       | 1    | 1     | 2       | 2       | 2       |
| $\chi_1 = \mathbb{1}$ | 1    | 1     | 1       | 1       | 1       |
| $\chi_2$              | 1    | 1     | -1      | -1      | 1       |
| $\chi_3$              | 1    | 1     | 1       | -1      | -1      |
| $\chi_4$              | 1    | 1     | -1      | 1       | -1      |
| $\chi_5$              | 2    | -2    | 0       | 0       | 0       |

Tableau 2 : La table de caractères de  $\mathbb{H}_8$

## Questions

**Exercice :** Montrer que tout caractère irréductible d'un groupe fini, de degré supérieur strictement à 1, s'annule au moins une fois.

*Solution :* Par l'absurde, on suppose que le caractère irréductible  $\chi$  d'un groupe fini  $G$  ne s'annule jamais. Or, on a

$$G = \bigsqcup \{g^i ; i \in I(g)\}$$

où  $I(g)$  désigne l'ensemble des entiers positifs, inférieurs à l'ordre de  $g$  et premier avec cet ordre.

Soit  $\rho$  la représentation sur un espace  $V$  de dimension  $d$  associée à  $\chi$ . Pour  $g \in G$  d'ordre  $k$ ,  $\rho(g)$  est diagonalisable. En effet, comme  $g^k = 1$ , on a  $\rho(g)^k = Id$ , donc le polynôme minimal de  $\rho(g)$  divise  $X^k - 1$ , qui est scindé à racines simples. Par suite, on en déduit que  $\chi_V$  est somme de  $\chi(1) = \dim V = d$  racines  $k^{ieme}$  de l'unité puisqu'en posant  $\omega_1, \dots, \omega_d$  les valeurs propres de  $\rho(g)$ , qui sont des racines  $k^{ieme}$  de l'unité, on a  $\chi(g) = \omega_1 + \dots + \omega_d$ .

Par suite,

$$\prod_{i \in I(g)} |\chi(g^i)| \geq 1 \Rightarrow \prod_{i \in I(g)} |\chi(g^i)|^2 \geq 1$$

Par l'inégalité entre la moyenne arithmétique et géométrique, on a

$$\frac{1}{I(g)} \sum_{i \in I(g)} |\chi(g^i)|^2 \geq \prod_{i \in I(g)} |\chi(g^i)|^{2/I(g)} \geq 1$$

Par conséquent,

$$\sum_{g \in G \setminus \{1\}} |\chi(g)|^2 \geq |G| - 1$$

Or  $\chi(1) = \dim V > 1$ , donc

$$\sum_{g \in G} |\chi(g)|^2 = \chi(1) + \sum_{g \in G \setminus \{1\}} |\chi(g)|^2 \geq |G| - 1 + \chi(1) > |G|$$

Ce qui contredit l'irréductibilité de  $\chi$  car

$$1 = \langle \chi, \chi \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi(g) \overline{\chi(g)} = \frac{1}{|G|} \underbrace{\sum_{g \in G} |\chi(g)|^2}_{> |G|} > 1$$

**Exercice :** On note  $(\chi_i)_{i=1}^p$  les caractères irréductibles de  $G$  et  $(C_i)_{i=1}^p$  les classes de conjugaison de  $G$ . Montrer que :

(i) Formule de Burnside :  $\sum_{i=1}^p \chi_i(1)^2 = |G|$

(ii) Orthogonalité des caractères :  $\sum_{i=1}^p \chi_i(C_k) \overline{\chi_i(C_l)} = 0$  pour  $k \neq l$ .

*Solution :* (i) On rappelle que pour une représentation  $\rho$  sur  $V$ , de caractère  $\chi_V$ . On a la décomposition :

$$V \underset{G\text{-iso.}}{\simeq} \bigoplus_{i=1}^p V_i^{\oplus a_i}$$

avec

$$a_i = \langle \chi_V, \chi_i \rangle$$

$$V_i^{\oplus a_i} = V_i \oplus \dots \oplus V_i \text{ (} a_i \text{ fois)}$$

De plus, on a

$$\langle \chi_V, \chi_V \rangle = \sum_{i=1}^p a_i^2$$

Pour montrer notre premier résultat, il suffit de décomposer la représentation régulière  $\rho_r$  de caractère  $\chi_r$  et de remarquer que  $\langle \chi_r, \chi_i \rangle := a_i = n_i := \dim_{\mathbb{C}}(V_i)$ . En effet,

$$a_i = \langle \chi_r, \chi_i \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_{s \in G} \overline{\chi_r(s)} \chi_i(s) = \frac{1}{|G|} \sum_{s \in G} \chi_r(s^{-1}) \chi_i(s) = \frac{1}{|G|} \chi_r(1) \chi_i(1) = \chi_i(1) = n_i$$

De plus, on rappelle que la représentation régulière s'applique sur un espace de dimension  $|G|$ . Par suite,

$$\langle \chi_V, \chi_V \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_{s \in G} \overline{\chi_r(s)} \chi_r(s) = \frac{1}{|G|} \sum_{s \in G} \chi_r(s^{-1}) \chi_r(s) = \frac{1}{|G|} \chi_r(1) \chi_r(1) = \chi_r(1) = |G|$$

(ii) Pour l'autre égalité, il faut considérer les fonctions "indicatrices sur les classes de conjugaison de  $G$ " (en fait, on va montrer un peu plus que cette égalité). Plus précisément, en notant  $\{C_1, \dots, C_p\}$  les différentes classes de conjugaison de  $G$ , les fonctions  $f_{C_1}, \dots, f_{C_p}$  définies par

$$\forall g \in G, \quad f_{C_i}(g) = \begin{cases} 1 & \text{si } g \in C_i \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

sont des fonctions de l'espace vectoriel des fonctions centrales  $\mathbb{C}[G]^G$  (en fait, c'est même une base de cet espace).

De plus,  $(\chi_i)_{i \in \widehat{G}} = (\chi_i)_{i=1}^p$  forme une base orthonormale de l'espace  $\mathbb{C}[G]^G$ . Ainsi, pour tout  $k \in \{1, \dots, p\}$ , on peut décomposer la fonction  $f_{C_k}$  dans la base  $(\chi_i)_{i=1}^p$  (i.e.)

$$f_{C_k} = \sum_{i=1}^p \langle \chi_i, f_{C_k} \rangle \chi_i$$

Soit  $l \in \{1, \dots, k\}$ . Comme les fonctions centrales sont constantes sur les classes de conjugaison, on peut se permettre de noter  $\chi_i(C_l)$  au lieu de  $\chi_i(g) \forall g \in C_l$ . Ainsi, d'une part, on a

$$\begin{aligned} f_{C_k}(C_l) &= \sum_{i=1}^p \langle \chi_i, f_{C_k} \rangle \chi_i(C_l) \\ &= \sum_{i=1}^p \left( \frac{1}{|G|} \sum_{s \in G} \overline{f_{C_k}(s)} \chi_i(s) \right) \chi_i(C_l) \\ &= \sum_{i=1}^p \left( \frac{1}{|G|} \#C_k \chi_i(C_k) \right) \chi_i(C_l) \\ &= \frac{\#C_k}{|G|} \sum_{i=1}^p \chi_i(C_k) \chi_i(C_l) \quad (\dagger) \end{aligned}$$

D'autre part, par définition de  $f_{C_k}$ ,

$$f_{C_k}(C_l) = \begin{cases} 1 & \text{si } k = l \\ 0 & k \neq l \end{cases}$$

Ainsi,  $(\dagger)$  devient

$$\sum_{i=1}^p \chi_i(C_k) \chi_i(C_l) = \begin{cases} \frac{|G|}{\#C_k} & \text{si } k = l \\ 0 & k \neq l \end{cases}$$

**Exercice :** On considère une représentation  $\rho$  d'un groupe  $G$  sur un  $\mathbb{C}$ -e.v.  $V$ . Justifier pourquoi, dans la définition de la représentation duale, on a  $\forall g \in G, \rho^*(g) := {}^t \rho(g^{-1})$  et non  $\forall g \in G, \rho^*(g) := {}^t \rho(g)$  ?

---

*Solution :* On peut apporter une réponse par un argument matriciel. Il faut se rappeler que  $\forall g \in G$ ,  $\rho(g) \in \text{GL}_n(\mathbb{C})$  où  $n = \dim V$ . Pour que  $\rho^*$  soit un morphisme, il faut bien évidemment

$$\forall g, h \in G, \quad \rho^*(gh) = \rho^*(g)\rho^*(h)$$

Or en prenant la deuxième "définition", on aura

$$\forall g, h \in G, \quad \rho^*(gh) = {}^t \rho(gh) = {}^t (\rho(g)\rho(h)) = {}^t \rho(h) {}^t \rho(g) = \rho^*(h)\rho^*(g) \neq \rho^*(g)\rho^*(h)$$

En revanche, avec la première définition, on a

$$\begin{aligned} \forall g, h \in G, \quad \rho^*(gh) &= {}^t \rho((gh)^{-1}) = {}^t (\rho(gh)^{-1}) \\ &= {}^t ((\rho(g)\rho(h))^{-1}) \\ &= {}^t (\rho(h)^{-1}\rho(g)^{-1}) \\ &= {}^t \rho(g)^{-1} {}^t \rho(h)^{-1} \\ &= \rho^*(g)\rho^*(h) \end{aligned}$$