

Groupe linéaire d'un espace vectoriel de dimension finie E , sous-groupes de $GL(E)$. Applications.

Mohamed NASSIRI

INTRO

Références

- [ML3al] Mathématiques L3 Algèbre, Aviva Szpirglas
[OBJ] Objectif Agrégation, Vincent Beck, Jérôme Malick et Gabriel Peyré
[DEL] Théorie des groupes 2e édition, Jean Delcourt
[PER] Cours d'algèbre, Daniel Perrin
[ROU] Petit guide de calcul différentiel, François Rouvière
[WAR] Mathématiques tout-en-un MPSI-PCSI, Claude Deschamps et André Warusfel
[FGNal1] Oraux X-ENS - Algèbre 1, Serge Francinou, Hervé Gianella et Serge Nicolas
[NEHH] Topologie générale et espaces normés - 2e édition, Nawfal El Hage Hassan ♠
[H2G2t1] Histoires hédonistes de groupes et de géométries - Tome 1, Philippe Caldero et Jérôme Germoni

Développements

Décomposition polaire

Connexité par arcs de $GL_n(\mathbb{C})$, $SU(n)$ et $U(n)$

Dans toute la leçon K désigne un corps commutatif quelconque et E un K -e.v.

Remarque 5 Ce résultat est faux en dimension infinie comme le montre l'application

$$u : \mathbb{R}[X] \rightarrow \mathbb{R}[X] \\ P \mapsto XP$$

1 Le groupe linéaire

1.1 Définitions et premières propriétés [ML3al] p.294 → 296

Définition 1 On appelle groupe linéaire l'ensemble des K -automorphismes de E et on le note $GL(E)$. Cet ensemble a une structure de groupe pour la composition des endomorphismes.

Définition 2 Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit $GL_n(K)$ comme le groupe des automorphismes de K^n .

Lorsque E est de dimension $n \in \mathbb{N}^*$, on a un isomorphisme entre $GL(E)$ et $GL_n(K)$ en fixant une base de E .

Remarque 3 Dans la suite, on étudie principalement $GL_n(K)$.

Proposition 4 Les assertions suivantes sont équivalentes :

- (i) $u \in GL(E)$
- (ii) $\text{Ker}(u) = \{0\}$
- (iii) $\det(u) \neq 0$
- (iv) $\text{Im}(u) = E$

On a $\text{Ker}(u) = \{0\}$ mais $u \notin GL(E)$

Définition 6 Le noyau de l'application $\det$ est appelé groupe spécial linéaire et est noté $SL_n(K)$ (i.e.)

$$SL_n(K) = \{u \in GL_n(K) \mid \det(u) = 1\}$$

Remarque 7 $SL_n(K)$ est distingué dans $GL_n(K)$.

1.2 Générateurs [FGNXXX] p.XXX

Dans cette section, A désigne une matrice de $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$

Définition 8 On appelle matrice de transvection toute matrice de la forme $T_{ij}(\lambda) = I_n + \lambda E_{i,j}$ avec $i \neq j$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.

On appelle matrice de dilatation toute matrice diagonale $D_i(\lambda) = I_n + (\lambda - 1)E_{i,i}$ avec $\lambda \in \mathbb{K}^*$

Remarque 9 On a un lien entre ces matrices et les opérations dites élémentaires.

Voir Tableau 1

Théorème 10 L'ensemble des matrices de transvection engendre le groupe $SL_n(\mathbb{K})$ et l'ensemble des matrices de transvection et de dilatation engendre le groupe $GL_n(\mathbb{K})$.

2 Sous-groupes

2.1 Centre et groupe dérivée [ML3a] p.302-303

Théorème 11 (i) $\mathcal{Z}(\mathrm{GL}_n(K)) = \{\lambda \mathrm{Id} ; \lambda \in K\}$
(ii) $\mathcal{Z}(\mathrm{SL}_n(K)) = \{\lambda \mathrm{Id} ; \lambda \in K \text{ et } \lambda^n = 1\}$

Théorème 12 Soit K un corps commutatif. Lorsque $K = \mathbb{F}_2$ ou $\mathbb{F}_3$, on suppose de plus $n \geq 3$.

(i) $D(\mathrm{GL}_n(K)) = \mathrm{SL}_n(K)$
(ii) $D(\mathrm{SL}_n(K)) = \mathrm{SL}_n(K)$
où $D(\mathrm{GL}_n(K))$ et $D(\mathrm{SL}_n(K))$ désignent respectivement les groupes dérivés de $\mathrm{GL}_n(K)$ et $\mathrm{SL}_n(K)$.

Théorème 13 Les cas exceptionnels :

(i) $D(\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_3)) = \mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_3)$
(ii) $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_2) = \mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_2) \simeq \mathfrak{S}_3$ et donc $D(\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_2)) \simeq \mathfrak{A}_3$
(iii) $|\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_3)| = 24$ et donc $D(\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_3)) \simeq \mathbb{H}_8$

2.2 Groupe orthogonal

Dans cette section, on considère $\mathrm{car}(K) \neq 2$ et q une forme quadratique non dégénérée (mais pas nécessairement définie ou positive) de forme polaire f .

Définition 14 Le groupe orthogonal $O(E, q)$ (ou $O(q)$ lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté) associé à q est l'ensemble

$$\{u \in \mathrm{GL}(E) \mid q(u(x)) = q(x), \forall x \in E\}$$

Un élément de $O(E, q)$ est appelé une isométrie (relativement à q).

Proposition 15 Soit $u \in O(q)$. Alors $\det(u) = \pm 1$.

Définition 16 Le sous-groupe de $O(q)$ formé des isométries de déterminant 1 est appelé sous-groupes des isométries positives et est noté $SO(q)$.

Remarque 17 $SO(q)$ est distingué dans $O(q)$.

Définition 18 Lorsque E est un $\mathbb{R}$ -e.v. (resp. $\mathbb{C}$ -e.v.) de dimension n muni du produit scalaire canonique, le groupe orthogonal est noté $O_n(\mathbb{R})$ (resp. $U(n)$).

Proposition 19 Etude de $O_2(\mathbb{R})$: Soit $A \in O_2(\mathbb{R})$. Alors :

- soit $A \in SO_2(\mathbb{R})$ et dans ce cas

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

(rotation d'angle θ et de centre O)

- soit $A \notin SO_2(\mathbb{R})$ et dans ce cas

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$$

(symétrie orthogonale par rapport à la droite d'angle polaire $\theta/2$) [GRI] p.241-242

Proposition 20 Etude de $O_3(\mathbb{R})$: Soient $A \in O_3(\mathbb{R})$ et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ tel que $A = \mathrm{Mat}(f)_{\mathcal{B}}$ (où $\mathcal{B}$ est la base canonique). Alors il existe une base orthonormée $\mathcal{B}'$ de $\mathbb{R}^3$ telle que

$$A' = \mathrm{Mat}(f)_{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon \end{pmatrix}$$

où $\epsilon = +1$ si $\det A = 1$, (i.e.) $A \in SO_3(\mathbb{R})$;
et $\epsilon = -1$ si $\det A = -1$, (i.e.) $A \notin SO_3(\mathbb{R})$. [GRI] p.243-245

Théorème 21 ♠ $SO_3(\mathbb{R})$ et les quaternions ♠
Soit G le groupe des quaternions de norme 1. On a l'isomorphisme suivant :

$$G/\{-1, 1\} \xrightarrow{\sim} SO_3(\mathbb{R})$$

[PER] p.160 $\rightarrow$ 164

2.3 Matrices de permutations [DEL] p.61 $\rightarrow$ 68

Définition 22 Soit $\sigma \in \mathcal{S}_n$, on appelle matrice de permutation une matrice de la forme $P_\sigma = (p_{ij})$ où $p_{ij} = \delta_{i\sigma(j)}$ pour $1 \leq i, j \leq n$ (où δ_{ij} est le symbole de Kronecker).

Proposition 23 (i) L'ensemble $\mathcal{P}$ des matrices de permutation est un groupe isomorphe à $\mathcal{S}_n$.

(ii) $\mathcal{P}$ agit par translation sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).

Exemple 24 Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ que l'on note $M =$

$$(C_1 \ C_2 \ C_3) = \begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{pmatrix} \text{ et en considérant } \sigma = (123).$$

Alors :

$$P_\sigma M = \begin{pmatrix} L_3 \\ L_1 \\ L_2 \end{pmatrix} \text{ et } MP_\sigma = (C_2 \ C_3 \ C_1)$$

Proposition 25 Soit $\sigma \in \mathcal{S}_n$. Alors $\det P_\sigma = \epsilon(\sigma)$. En d'autres termes, le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{S}_n & \xrightarrow{\varphi} & \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \\ \phi \downarrow & & \downarrow \det \\ \{-1, 1\} & \longrightarrow & \mathbb{K}^* \end{array}$$

[OBJ] p.188

3 Topologie

3.1 Densité

Proposition 26 Le groupe linéaire $GL_n(K)$ est un ouvert dense dans $\mathcal{M}_n(K)$. [ML3al] p.310

Application 27 Soient $M, N \in \mathcal{M}_n(K)$. On note χ_A le polynôme caractéristique d'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(K)$. Alors

$$\chi_{MN} = \chi_{NM}$$

[ML3al] p.310-311

Application 28 L'application déterminant est de classe C^1 sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\forall X, M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a :

$$D\det(X)(H) = \text{tr}({}^t \text{com}(X)H)$$

[ROU] p.74 – 75 → 331

3.2 Homéomorphismes [ML3al] p.311

Définition 29 On définit les ensembles

$$GL_n^+(\mathbb{R}) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid \det(M) > 0\}$$

$$GL_n^-(\mathbb{R}) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid \det(M) < 0\}$$

Proposition 30 On a un homéomorphisme entre $GL_n^+(\mathbb{R})$ et $GL_n^-(\mathbb{R})$

Proposition 31 On a les deux homéomorphismes suivants

$$GL_n(\mathbb{C}) \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}^* \times SL_n(\mathbb{C})$$

$$GL_n^+(\mathbb{R}) \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^{+*} \times SL_n(\mathbb{R})$$

3.3 Connexité [NEHH] p.517-518

Théorème 32 ♠ $GL_n(\mathbb{C})$, $SU(n)$ et $U(n)$ sont connexes par arcs. ♠

Proposition 33 (i) $SO_n(\mathbb{R})$ est connexe par arcs.
(ii) $O_n(\mathbb{R})$ a deux composantes connexes dont celle contenant I_n est $SO_n(\mathbb{R})$.
(iii) $GL_n(\mathbb{R})$ a deux composantes connexes :

$$GL_n^+(\mathbb{R}) \text{ et } GL_n^-(\mathbb{R})$$

Proposition 34 Pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, $SL_n(\mathbb{K})$ est connexe par arcs.

3.4 Compacité [ML3al] p.328

Proposition 35 $SU(n)$ et $U(n)$ sont compacts. $O_n(\mathbb{R})$ et $SO_n(\mathbb{R})$ sont compacts. [NEHH] p.517

Remarque 36 Cela est faux en général pour le groupe orthogonal $O(q)$ d'une forme quadratique quelconque, même non dégénérée. Par exemple, la forme quadratique q donnée par la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ dans la base canonique, nous donne que les éléments de $O(q)$ sont de la forme

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & \frac{1}{a} \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 0 & b \\ \frac{1}{b} & 0 \end{pmatrix}$$

$O(q)$ n'est donc pas borné, ce qui implique qu'il n'est pas compact.

Théorème 37 ♠ Décomposition polaire ♠
On a les homéomorphismes suivants :

$$O_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}) \xrightarrow{\sim} GL_n(\mathbb{R}), (O, S) \mapsto OS$$

$$U_n \times \mathcal{H}_n^{++} \xrightarrow{\sim} GL_n(\mathbb{C}), (U, H) \mapsto UH$$

[H2G2t1] p.202

Corollaire 38 Tout sous-groupe compact de $GL_n(\mathbb{R})$ qui contient $O_n(\mathbb{R})$ est $O_n(\mathbb{R})$ lui-même. [H2G2t1] p.205

Corollaire 39 Tout sous-groupe fini G de $GL_n(\mathbb{R})$ est conjugué à un sous-groupe de $O_n(\mathbb{R})$. [H2G2t1] p.206

4 Excursion sur les corps finis

Proposition 40 Sur un corps fini $\mathbb{F}_q$ à q éléments et pour un entier m donné, les ensembles suivants ont pour cardinaux :

(i) Espace vectoriel :

$$|\mathbb{F}_q^m| = q^m$$

(ii) Groupe linéaire :

$$|GL_m(\mathbb{F}_q)| = (q^m - 1)(q^m - q) \dots (q^m - q^{m-1}) \\ = (q^m - 1)(q^{m-1} - 1) \dots (q - 1)q^{m(m-1)/2}$$

C'est aussi le nombre de bases de $\mathbb{F}_q^m$.

(ii) Groupe spécial linéaire :

$$|SL_m(\mathbb{F}_q)| = \frac{(q^m - 1)(q^m - q) \dots (q^m - q^{m-1})}{q - 1} \\ = (q^m - 1)(q^{m-1} - 1) \dots (q^2 - 1)q^{m(m-1)/2}$$

[H2G2t1] p.250-252, [FGNal1] p.17

Proposition 41 Soit q une puissance d'un nombre premier impair. On a un isomorphisme :

$$SO_2(\mathbb{F}_q) \simeq \begin{cases} \mathbb{Z}/(q-1)\mathbb{Z} & \text{si } -1 \in \mathbb{F}_p^{*2} \\ \mathbb{Z}/(q+1)\mathbb{Z} & \text{si } -1 \notin \mathbb{F}_p^{*2} \end{cases}$$

5 Actions de groupe et représentations linéaires de groupe

5.1 Actions de groupe

5.1.1 Action de $\mathrm{GL}_m(\mathbb{K}) \times \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ sur $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ par équivalence [H2G2t1] p.4-5

Définition 42 On définit l'action de $G := \mathrm{GL}_m(\mathbb{K}) \times \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ sur $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ par équivalence par

$$G \times \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K}) \rightarrow \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$$

$$((P, Q), A) \mapsto (P, Q).A = PAQ^{-1}$$

On dit que deux matrices $A, B \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ sont équivalentes si elles sont dans la même orbite pour l'action par équivalence.

Proposition 43 Théorème du rang
En notant

$$\mathcal{O}_A = \{B \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K}) \mid \exists (P, Q) \in G, B = PAQ^{-1}\}$$

l'orbite de A sous l'action de G , on a, pour tout $A, B \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$:

$$\mathcal{O}_A = \mathcal{O}_B \Leftrightarrow \mathrm{rg} A = \mathrm{rg} B$$

En particulier, les orbites sont paramétrées par le rang, entier compris entre 0 et $\min(n, m)$.

5.1.2 Action de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ sur $\mathcal{D}_n(\mathbb{C})$ par conjugaison [H2G2t1] p.84→86

Définition 44 On définit l'action de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ sur $\mathcal{D}_n(\mathbb{C})$ (ensemble des matrices diagonalisables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$) par conjugaison par

$$\mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \times \mathcal{D}_n(\mathbb{C}) \rightarrow \mathcal{D}_n(\mathbb{C})$$

$$(P, A) \mapsto P.A = PAP^{-1}$$

On dit que deux matrices $A, B \in \mathcal{D}_n(\mathbb{C})$ sont semblables si elles sont dans la même orbite pour l'action par conjugaison.

Théorème 45 En notant

$$\mathcal{O}_A = \{B \in \mathcal{D}_n(\mathbb{C}) \mid \exists P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}), B = PAP^{-1}\}$$

l'orbite de A sous l'action de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, et $\mathrm{Spec}(A)$, l'ensemble des valeurs propres de $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ prises avec multiplicités, on a, pour tout $A \in \mathcal{D}_n(\mathbb{C})$, que l'application

$$\mathcal{D}_n(\mathbb{C})/\mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C}^n/\mathfrak{S}_n$$

$$\mathcal{O}_A \mapsto \mathrm{Spec}(A)$$

est bien définie et bijective.

Corollaire 46 Le polynôme caractéristique ou le spectre (valeurs propres avec multiplicités) sont des invariants totaux de similitude pour les matrices diagonalisables.

Remarque 47 C'est faux pour le polynôme minimal (i.e.) en ne considérant que les valeurs propres sans multiplicités comme le montre les matrices suivantes

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Proposition 48 Une matrice complexe A est diagonalisable si et seulement si son orbite $\mathcal{O}_A$ sous $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ est fermée dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

5.1.3 Action de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ sur $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ par congruence [H2G2t1] p.149→157

Définition 49 On définit l'action de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ sur $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ par congruence par

$$\mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \rightarrow \mathcal{S}_n(\mathbb{K})$$

$$(P, A) \mapsto P.A = PAP^*$$

On dit que deux matrices $A, B \in \mathcal{S}_n(\mathbb{C})$ sont congrues si elles sont dans la même orbite pour l'action par conjugaison.

Théorème 50 En notant

$$\mathcal{O}_A = \{B \in \mathcal{S}_n(\mathbb{K}) \mid \exists P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}), B = PAP^*\}$$

l'orbite de A sous l'action de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$, on a :

(i) Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, et $A, A' \in \mathcal{S}_n(\mathbb{C})$:

$$\mathcal{O}_A = \mathcal{O}_{A'} \Leftrightarrow \mathrm{rg} A = \mathrm{rg} A'$$

(ii) Théorème de Sylvester : Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, et $A, A' \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$:

$$\mathcal{O}_A = \mathcal{O}_{A'} \Leftrightarrow \mathrm{rg} A = \mathrm{rg} A' \text{ et } \mathrm{sign} A = \mathrm{sign} A'$$

(iii) Si $\mathbb{K} = \mathbb{F}_q$, et $A, A' \in \mathcal{S}_n(\mathbb{F}_q)$ inversibles :

$$\mathcal{O}_A = \mathcal{O}_{A'} \Leftrightarrow \delta(A) = \delta(A')$$

où $\delta(A)$ est le déterminant de A modulo les carrés de $\mathbb{F}_q$.

5.2 Représentations linéaires de groupes [PEY] p.194 → 205

Définition 51 Soit V un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de dimension finie n . Une représentation linéaire d'un groupe G dans V est la donnée d'un morphisme $\rho : G \rightarrow \mathrm{GL}(V)$. Ceci correspond à la donnée d'une action linéaire du groupe G sur V :

$$G \times V \rightarrow V$$

$$(g, v) \mapsto g.v = \rho(g)(v)$$

Une représentation ρ est dite fidèle si G agit fidèlement sur V .

Exemple 52 Fort de l'isomorphisme $Is(\Delta_4) \approx \mathfrak{S}_4$, on peut établir une représentation du groupe $\mathfrak{S}_4$ sur l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ comme un groupe de transformations orthogonales.

Définition 53 • Soient ρ et ρ' deux représentations d'un même groupe G respectivement sur deux $\mathbb{C}$ -espace vectoriel V et V' . Un opérateur d'entrelacement est une application linéaire $\tau : V \rightarrow V'$ tel que pour tout $g \in G$, $\tau \circ \rho(g) = \rho'(g) \circ \tau$

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{\tau} & V' \\ \rho(g) \downarrow & & \downarrow \rho'(g) \\ V & \xrightarrow{\tau} & V' \end{array}$$

• Deux représentations ρ et ρ' d'un même groupe G respectivement sur deux $\mathbb{C}$ -espace vectoriel V et V' sont dites isomorphes si τ est bijective.

Définition 54 • Si une représentation ρ de G sur V admet un sous-espace vectoriel $W \subset V$ stable pour tous les $\rho(g) \in GL(V)$, elle induit une représentation ρ_W sur W appelée sous-représentation.

• Une représentation sur un espace V est dite irréductible si elle admet exactement deux sous-représentations : $\{0\}$ et V tout entier.

Proposition 55 Toute représentation peut s'écrire comme somme de représentations irréductibles.

Proposition 56 Lemme de Schur :

Soient ρ et ρ' deux représentations irréductibles d'un groupe G respectivement sur deux $\mathbb{C}$ -espace vectoriel V et V' et $f \in \mathcal{L}(V, V')$ un opérateur d'entrelacement. Alors

(i) si ρ et ρ' ne sont pas isomorphes, $f = 0$.

(ii) Si $f \neq 0$, alors f est un isomorphisme.

Si on suppose $V = V'$, alors f est une homothétie.

Illustrations

Opération élémentaire	Multiplication par	
$L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$	$I_n + \lambda E_{i,j}$	Multiplication à gauche
$L_i \leftarrow \lambda L_i$	$I_n + (1 - \lambda) E_{i,i}$	
$L_i \leftrightarrow L_j$	$I_n - E_{i,i} - E_{j,j} + E_{i,j} + E_{j,i}$	
$C_i \leftarrow C_i + \lambda C_j$	$I_p + \lambda E_{j,i}$	Multiplication à droite
$C_i \leftarrow \lambda C_i$	$I_p + (1 + \lambda) E_{i,i}$	
$C_i \leftrightarrow C_j$	$I_p - E_{i,i} - E_{j,j} + E_{i,j} + E_{j,i}$	

Tableau 1 : Opérations élémentaires et matrices de transvections et dilatations

Questions

Exercice : Ecrire la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

comme un produit de matrices de transvection et de dilatation.

Solution :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} &\xleftrightarrow[L_1 \leftarrow L_1 + L_2]{T_{12}(1)} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &\xleftrightarrow[L_2 \leftarrow L_2 + L_1]{T_{21}(1)} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \\ &\xleftrightarrow[L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1]{T_{21}(-2)} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\ &\xleftrightarrow[L_1 \leftarrow L_1 + L_2]{T_{12}(1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = D_2(-1) \end{aligned}$$

Par suite, on a

$$D_2(-1) = T_{12}(1)T_{21}(1)T_{21}(-2)T_{12}(1)M$$

et donc

$$M = [T_{12}(1)T_{21}(1)T_{21}(-2)T_{12}(1)]^{-1}D_2(-1) = T_{12}(-1)T_{21}(2)T_{21}(-1)T_{12}(-1)D_2(-1)$$

Exercice : Soit G un sous-groupe abélien fini de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$. Montrer que G est conjugué à un sous-groupe de matrices diagonales $\mathcal{D}_n(\mathbb{C})$.

Solution : Il faut montrer qu'il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ telle que $PGP^{-1} \subseteq \mathcal{D}_n(\mathbb{C})$.

Comme G est fini, il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $g \in G$, $g^p = I_n$. Or le polynôme $X^p - 1$ est scindé à racines simples, donc g est diagonalisable.

De plus, comme G est abélien, tous les éléments de G commutent et ainsi ils sont diagonalisables dans une même base (*i.e.*) il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ telle que $\forall g \in G$, PgP^{-1} soit une matrice diagonale (*i.e.*) telle que $PGP^{-1} \subseteq \mathcal{D}_n(\mathbb{C})$.

Exercice :

Solution :

