

Exemples de sous-groupes distingués et de groupes quotients. Applications.

Mohamed NASSIRI

L'idée de départ est de trouver une "décomposition atomique" des groupes. Ces "atomes" sont les *sous-groupes distingués*. Avoir un sous-groupe distingué permet de *quotienter* le groupe et de garder encore une structure de groupe.

Une autre façon de voir est la suivante : quotienter permet de faciliter l'étude d'un ensemble en "regroupant" des éléments "de même nature". Par exemple, pour les espaces L^p , on peut se rappeler que pour $p \in [1, +\infty]$, l'espace $L^p(X)$ est le quotient de l'espace $\mathcal{L}^p(X)$ (l'ensemble des fonctions f , mesurables de X dans $\mathbb{C}$, qui vérifient $\|f\|_p < \infty$) par le noyau de la semi-norme $\|\cdot\|_p$:

$$L^p(X) = \mathcal{L}^p(X) / \text{Ker} \|\cdot\|_p$$

On introduit la notion de *relation d'équivalence à droite et à gauche modulo H dans G* comme suit : à tout sous-groupe H d'un groupe G , on peut associer deux relations d'équivalences $\mathcal{R}_H$ et ${}_H\mathcal{R}$, définies dans G par :

$$x\mathcal{R}_Hy \Leftrightarrow xy^{-1} \in H \text{ et } x{}_H\mathcal{R}y \Leftrightarrow x^{-1}y \in H$$

Ainsi, dans un groupe G , un sous-groupe H sera dit *distingué* si $\mathcal{R}_H = {}_H\mathcal{R}$ (Notation : $H \triangleleft G$). Cependant, on utilise souvent la caractérisation suivante :

$$H \triangleleft G \Leftrightarrow xhx^{-1} \in H, \forall h \in H, \forall x \in G$$

Par ailleurs, on peut même montrer que dans un groupe G , on a $H \triangleleft G$ si et seulement s'il existe un groupe G' et un morphisme $f \in \text{Hom}(G, G')$ tel que $H = \text{Ker} f$. On introduit également les notions de *centre*, *normalisateur*, *centralisateur* et *groupe dérivée* qui nous permettent d'avoir plusieurs résultats intéressants et importants concernant les sous-groupes distingués.

Grâce à la notion de sous-groupes distingués, on a les très célèbres théorèmes d'isomorphismes :

1^{er} théorème d'isomorphisme :

Soient G un groupe, $H \triangleleft G$ et $\pi : G \rightarrow \frac{G}{H}$ la projection canonique. Alors, quelque soient le groupe G' et le morphisme $f : G \rightarrow G'$ tel que $H \subseteq \text{Ker} f$, il existe un unique morphisme $\varphi : \frac{G}{H} \rightarrow G'$ tel que $\varphi \circ \pi = f$

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{\pi} & \frac{G}{H} \\ & \searrow f & \swarrow \varphi \\ & \text{Im} f \subseteq G' & \end{array}$$

2^{eme} théorème d'isomorphisme :

Soient G un groupe, $H \triangleleft G$. Alors pour tout sous-groupe K de G , les groupes quotients $\frac{K}{H \cap K}$ et $\frac{HK}{H}$ existent et on a

$$\begin{array}{ccc} \frac{K}{H \cap K} & \xrightarrow{j} & \frac{HK}{H} \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi' \\ \frac{K}{H \cap K} & \xrightarrow{\exists! \varphi} & \frac{HK}{H} \end{array}$$

3^{eme} théorème d'isomorphisme :

Soient H et K deux sous-groupes distingués d'un groupe G tels que $H \subseteq K$. Alors on a

$$\begin{array}{ccc} \frac{G}{K} & \xrightarrow{\sigma} & \frac{\frac{G}{H}}{\frac{K}{H}} \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi' \\ \frac{G}{K} & \xrightarrow{\exists! \bar{\sigma}} & \frac{\frac{G}{H}}{\frac{K}{H}} \end{array}$$

En s'intéressant aux *espaces vectoriels quotients*, on peut montrer que l'on peut construire le cylindre et le tore de la façon suivante :

Construction du cylindre $\mathcal{C}$:

$$\mathcal{C} = \mathbb{R}^2 / \mathcal{R}$$

où

$$(x_1, y_1) \underset{\mathcal{R}}{\sim} (x_2, y_2) \Leftrightarrow \begin{cases} \exists k \in \mathbb{Z} \text{ tel que :} \\ x_2 = x_1 + 2k\pi R \\ y_1 = y_2 \end{cases}$$

Construction du tore $\mathcal{T}$:

$$\mathcal{T} = \mathbb{R}^2 / \mathcal{R}$$

où

$$(x_1, y_1) \underset{\mathcal{R}}{\sim} (x_2, y_2) \Leftrightarrow \begin{cases} \exists k, h \in \mathbb{Z} \text{ tel que :} \\ x_2 = x_1 + 2k\pi R_1 \\ y_1 = y_2 + 2h\pi R_2 \end{cases}$$

Une théorie "mélange" les espaces vectoriels et les groupes : Une *représentation linéaire* d'un groupe G dans V est la donnée d'un morphisme $\rho : G \rightarrow \text{GL}(V)$. L'intérêt des sous-groupes distingués est le suivant : soit $N \triangleleft G$. On note ρ_U la représentation régulière de G/N . Alors il existe une représentation canonique $\tilde{\rho}_U$ de G sur U telle que les sous-représentations de U sous l'action de G/N soient exactement celles de U sous l'action de G .

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{\tilde{\rho}_U} & \text{GL}(U) \\ & \searrow \pi & \nearrow \rho_U \\ & G/N & \end{array}$$

A partir d'une représentation ρ d'un groupe G sur un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel V de dimension n , on lui associe son *caractère* χ_ρ défini par $\chi_\rho(g) = \text{tr}(\rho(g))$, où tr désigne la trace. C'est une fonction de G dans $\mathbb{C}$, (*i.e.*) $\chi_\rho \in \mathbb{C}[G]$. Dans cet espace, on va poser un produit scalaire : si φ et ψ sont deux fonctions de G dans $\mathbb{C}$, on pose

$$\langle \varphi, \psi \rangle := \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \varphi(g) \overline{\psi(g)}$$

$\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit hermitien sur l'espace vectoriel $\mathbb{C}[G]$ des fonctions de G dans $\mathbb{C}$. Il se trouve que les caractères des représentations irréductibles d'un groupe G forment une famille orthonormée pour ce produit scalaire. En fait, on a mieux ! Les caractères sont des fonctions dites *centrales* : une fonction $\varphi : G \rightarrow \mathbb{C}$ est dite centrale si elle vérifie

$$\forall g, h \in G, \varphi(ghg^{-1}) = \varphi(h)$$

On note $\mathbb{C}[G]^G$ l'ensemble des fonctions centrales : c'est un sous-espace vectoriel de l'espace $\mathbb{C}[G]$. Les caractères irréductibles forment une base orthonormée de l'espace des fonctions centrales ! On peut donc en déduire un résultat important de la théorie des représentations : le nombre de représentations irréductibles sur G non isomorphes est égal au nombre de classes de conjugaisons de G .

Une table des caractères est importante et permet d'avoir plusieurs informations sur un groupe : notamment les sous-groupes distingués à partir de la notion de *noyau de caractères*, etc. Mais une table de caractère ne détermine pas totalement une groupe. En effet, on peut montrer que le groupe des quaternions de norme 1, $\mathbb{H}_8$, et le groupe diédral D_4 (d'ordre 8) ont la même table des caractères et pourtant ils ne sont pas isomorphes.

Références

- [ML3a] Mathématiques L3 Algèbre, Aviva Szpirglas
- [GRI] Algèbre linéaire 5e Edition, Joseph Grifone
- [CAL] Éléments de théorie des groupes, Josette Calais
- [DEL] Théorie des groupes 2e édition, Jean Delcourt
- [PEY] L'algèbre discrète de la transformée de Fourier, Gabriel Peyré
- [H2G2t1] Histoires hédonistes de groupes et de géométries - Tome 1, Philippe Caldero et Jérôme Germoni

Développements

$SO_3(\mathbb{R})$ et les quaternions
Noyaux de caractères et sous-groupes distingués

1 Sous-groupes distingués, groupes quotients

Dans cette leçon, G est un groupe et X un ensemble.

1.1 Définitions et premières propriétés [CAL] p.71 → 77, p.149 → 152

Proposition-définition 1 *A tout sous-groupe H d'un groupe G , on peut associer deux relations d'équivalences $\mathcal{R}_H$ et ${}_H\mathcal{R}$, dites respectivement relation d'équivalence à droite et à gauche modulo H dans G , définies dans G par :*

$$x\mathcal{R}_Hy \Leftrightarrow xy^{-1} \in H \text{ et } x{}_H\mathcal{R}y \Leftrightarrow x^{-1}y \in H$$

Les ensembles $Hx := \{hx ; h \in H\}$ et $xH := \{xh ; h \in H\}$ sont respectivement appelés classes à droite et à gauche de x modulo H .

Les ensembles quotients $\frac{G}{\mathcal{R}_H}$ et $\frac{G}{{}_H\mathcal{R}}$ sont respectivement notés $(\frac{G}{H})_d$ et $(\frac{G}{H})_g$.

Le cardinal de $(\frac{G}{H})_d$ ($= \text{card}((\frac{G}{H})_d)$) s'appelle l'indice de H dans G et se note $[G : H]$.

Définition 2 *Dans un groupe G , un sous-groupe H est dit distingué (ou normal) si $\mathcal{R}_H = {}_H\mathcal{R}$. On notera $H \triangleleft G$.*

Théorème 3 *Si H est un sous-groupe distingué d'un groupe G , alors l'ensemble quotient $\frac{G}{H}$ peut-être muni de la loi de composition quotient induite par celle de G , telle que*

$$\overline{xy} = \overline{x}\overline{y}, \quad \forall \overline{x}, \overline{y} \in \frac{G}{H}$$

relativement à cette loi.

$\frac{G}{H}$ est un groupe et l'application canonique $\pi : G \rightarrow \frac{G}{H}$ est un épimorphisme de groupes.

Définition 4 *Si $H \triangleleft G$, le groupe $\frac{G}{H}$ est appelé groupe quotient de G par le sous-groupe distingué H .*

Théorème 5 *Dans un groupe G , on a $H \triangleleft G$ si et seulement s'il existe un groupe G' et un morphisme $f \in \text{Hom}(G, G')$ tel que $H = \text{Ker} f$.*

Définition 6 *Un groupe G est dit simple si $G \neq \{e\}$ et s'il n'a pas d'autre sous-groupe distingué que G et $\{e\}$.*

Proposition 7 *Les seuls groupes simples abéliens sont les groupes cycliques d'ordre premier.*

1.2 Premiers exemples [CAL] p.149 → 151

Exemple 8 *Dans tout groupe G , $\{e\}$ et G sont distingués.*

Exemple 9 *Dans un groupe abélien, tout sous-groupe est distingué.*

Exemple 10 *Pour tout entier $n > 1$, le groupe alterné $\mathfrak{A}_n$ est distingué dans $\mathfrak{S}_n$.*

Exemple 11 *Si E est un espace vectoriel de dimension finie sur un corps commutatif K , le groupe spécial linéaire $\text{SL}(E)$ est distingué dans $\text{GL}(E)$.*

1.3 Caractérisations et propriétés [CAL] p.154 → 161

Théorème 12 *H est un sous-groupe distingué d'un groupe G si et seulement s'il vérifie l'une des cinq conditions équivalentes suivantes :*

- (i) $Hx = xH, \forall x \in G$
- (ii) $xHx^{-1} = H, \forall x \in G$
- (iii) $x^{-1}Hx = H, \forall x \in G$
- (iv) $xhx^{-1} \in H, \forall h \in H, \forall x \in G$
- (v) $x^{-1}hx \in H, \forall h \in H, \forall x \in G$

Remarque 13 *Si H et K sont deux sous-groupes d'un groupe G , tels que $H \subseteq K$, alors si $H \triangleleft G$, on a $H \triangleleft K$.*

Exemple 14 *Pour tout groupe G , on a $\text{Int}G \triangleleft \text{Aut}G$, où $\text{Int}G$ est le groupe des automorphismes intérieurs de G (i.e.) de la forme*

$$\begin{aligned} \sigma_g : G &\rightarrow G \\ g &\mapsto gxg^{-1} \end{aligned}$$

Pour tout $\alpha \in \text{Aut}G$, on a

$$\alpha \circ \sigma_g \circ \alpha^{-1} = \sigma_{\alpha(g)}$$

Proposition 15 *Soit G un groupe quelconque et $Z(G)$ son centre :*

$$Z(G) = \{a \in G \mid ax = xa, \forall x \in G\}$$

$Z(G)$ est un sous-groupe de G et pour tout $x \in G$ et $a \in Z(G)$, on a $xa^{-1} \in Z(G)$, donc $Z(G) \triangleleft G$.

Plus généralement :

$$H \leq G \text{ et } H \subseteq Z(G) \Rightarrow H \triangleleft G$$

Proposition 16 *Soit G un groupe quelconque et $Z(G)$ son centre, alors on a*

$$\frac{G}{Z(G)} \text{ est monogène} \Rightarrow G \text{ est abélien}$$

Proposition 17 *Soient G un groupe et H un sous-groupe de G , alors :*

$$[G : H] = 2 \Rightarrow H \triangleleft G$$

Exemple 18 *Dans le groupe diédral D_n d'ordre $2n$, le sous-groupe cyclique des rotations Γ_n est d'indice 2, d'où $\Gamma \triangleleft D_n$.*

Proposition 19 Soient G un groupe et $\{H_i\}_{i \in I}$ une famille de sous-groupes de G , alors :

$$(H_i \triangleleft G, \forall i \in I) \Rightarrow \bigcap_{i \in I} H_i \triangleleft G$$

Proposition 20 Soient deux groupes G et G' et $f \in \text{Hom}(G, G')$. Alors :

- (i) $H \triangleleft G \Rightarrow f(H) \triangleleft f(G)$. En particulier, si f est surjective, $f(H) \triangleleft G'$.
- (ii) $H' \triangleleft G' \Rightarrow f^{-1}(H') \triangleleft G$.

Proposition 21 Soient H et K deux sous-groupes d'un groupe G . Alors :

- (i) $H \triangleleft G \Rightarrow H \cap K \triangleleft K$.
- (ii) $H \triangleleft G \Rightarrow HK$ est un sous groupe de G et que $H \triangleleft HK$.

Définition 22 Soient G un groupe et $S \neq \emptyset$ dans $\mathcal{P}(G)$ (l'ensemble des parties de G). On dit $S' \in \mathcal{P}(G)$ est conjuguée de S s'il existe $x \in G$ tel que $S' = xSx^{-1} := \{xsx^{-1} ; s \in S\}$

L'ensemble $\{xSx^{-1} ; x \in G\}$ est appelé classe de conjugaison de S .

Définition 23 (i) Etant donné une partie non vide S d'un groupe G , on appelle normalisateur de S dans G le sous-groupe

$$N_G(S) := \{x \in G \mid xSx^{-1} = S\}$$

(ii) Pour $S \in \mathcal{P}(G)$ tel que $\text{card} S > 1$, on appelle centralisateur de S dans G l'ensemble

$$C_G(S) := \{x \in G \mid xsx^{-1} = s, \forall s \in S\}$$

Théorème 24 Soit H un sous-groupe d'un groupe G . Alors :

$$H \triangleleft G \Leftrightarrow N_G(H) = G$$

Proposition 25 Soit G un groupe. Alors :

- (i) Pour tout sous-groupe H de G , on a $H \triangleleft N_G(H)$.
- (ii) Si H et K sont deux sous-groupes de G tels que $H \leq K$, alors

$$H \triangleleft K \Rightarrow K \leq N_G(H)$$

- (iii) $K \leq N_G(H) \Rightarrow HK \leq G$ et $H \triangleleft HK$.

Remarque 26 Pour tout sous-groupe H d'un groupe G , $N_G(H)$ est le plus grand sous-groupe (au sens de l'inclusion) de G dans lequel H est normal.

1.4 Cas particulier : groupe dérivé [CAL] p.171

Définition 27 Soit G un groupe. On appelle commutateur de x et y dans G l'élément $[x, y] := x^{-1}y^{-1}xy$ pour tout $x, y \in G$.

On appelle groupe dérivé de G , le sous-groupe de G engendré par l'ensemble des commutateurs de G . On le note $D(G)$.

Remarque 28 (i) G est abélien si et seulement si $D(G) = e$ pour tout $x, y \in G$.

(ii) $H \triangleleft G$ et x ou y dans $H \Rightarrow [x, y] \in H$

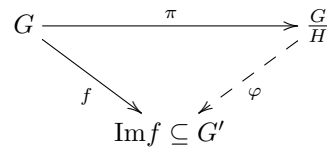
Théorème 29 Soit G un groupe. On a

- (i) $D(G) \triangleleft G$.
- (ii) Si $N \triangleleft G$, alors G/N est un groupe abélien si et seulement si $D(G) \subseteq N$. En particulier, $G/D(G)$ est abélien.

2 Les théorèmes d'isomorphismes [CAL] p.161 → 170

Théorème 30 Premier théorème d'isomorphisme

Soient G un groupe, $H \triangleleft G$ et $\pi : G \rightarrow \frac{G}{H}$ la projection canonique. Alors, quelque soient le groupe G' et le morphisme $f : G \rightarrow G'$ tel que $H \subseteq \text{Ker} f$, il existe un unique morphisme $\varphi : \frac{G}{H} \rightarrow G'$ tel que $\varphi \circ \pi = f$



Corollaire 31 Sous les hypothèses du théorème précédent, on a :

- (i) f surjectif $\Rightarrow \varphi$ surjectif.
- (ii) $H = \text{Ker} f \Rightarrow \varphi$ injectif.
- (iii) f surjectif et $H = \text{Ker} f \Rightarrow \varphi$ est un isomorphisme.

Théorème 32 Soient G un groupe et $H \triangleleft G$ et soit $\pi : G \rightarrow \frac{G}{H}$ la projection canonique. Alors :

- (i) Tout sous-groupe $\bar{K}$ de $\frac{G}{H}$ est l'image par π d'un unique sous-groupe de K de G contenant H . Plus précisément :

$$\bar{K} = \pi(K) \text{ où } K = \pi^{-1}(\bar{K}) ; \text{ de plus } \pi(K) = \frac{K}{H}$$

- (ii) Si K_1 est un sous-groupe de G tel que $H \subseteq K_1$, alors HK_1 est un sous-groupe de G contenant H et

$$\pi(K_1) = \frac{HK_1}{H}$$

Proposition 33 Soit G un groupe et $H \triangleleft G$.

- (i) Si K et K' sont deux sous-groupes de G contenant H , alors

$$H \leq K \leq K' \Rightarrow \frac{K}{H} \leq \frac{K'}{H}$$

- (ii)

$$(H \leq K \text{ et } K \triangleleft G) \Leftrightarrow \frac{K}{H} \leq \frac{G}{H}$$

Proposition 34 Soient deux groupes G et G' . Etant donné $H \triangleleft G$, $H' \triangleleft G'$ et $f \in \text{Hom}(G, G')$ tel que $f(H) \subseteq H'$, il existe un unique morphisme $\bar{f} \in \text{Hom}\left(\frac{G}{H}, \frac{G'}{H'}\right)$ tel que

$$\bar{f} \circ \pi = \pi' \circ f$$

où $\pi : G \rightarrow \frac{G}{H}$ et $\pi' : G' \rightarrow \frac{G'}{H'}$

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{f} & G' \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi' \\ \frac{G}{H} & \xrightarrow{\exists! \bar{f}} & \frac{G'}{H'} \end{array}$$

Théorème 35 Deuxième théorème d'isomorphisme Soient G un groupe, $H \triangleleft G$. Alors pour tout sous-groupe K de G , les groupes quotients $\frac{K}{H \cap K}$ et $\frac{HK}{H}$ existent et on a

$$\begin{array}{ccc} \frac{K}{H \cap K} & \xrightarrow{\sim} & \frac{HK}{H} \\ \downarrow \pi & & \downarrow \pi' \\ K & \xrightarrow{j} & HK \\ \downarrow \pi & & \downarrow \pi' \\ \frac{K}{H \cap K} & \xrightarrow{\exists! \varphi} & \frac{HK}{H} \end{array}$$

Théorème 36 Troisième théorème d'isomorphisme Soient H et K deux sous-groupes distingués d'un groupe G tels que $H \subseteq K$. Alors on a

$$\begin{array}{ccc} \frac{G}{K} & \xrightarrow{\sim} & \frac{\frac{G}{H}}{\frac{K}{H}} \\ \downarrow \pi & & \downarrow \pi' \\ G & \xrightarrow{\sigma} & \frac{G}{H} \\ \downarrow \pi & & \downarrow \pi' \\ \frac{G}{K} & \xrightarrow{\exists! \bar{\sigma}} & \frac{\frac{G}{H}}{\frac{K}{H}} \end{array}$$

3 Espaces vectoriels quotients [GRI] p.354 → 357

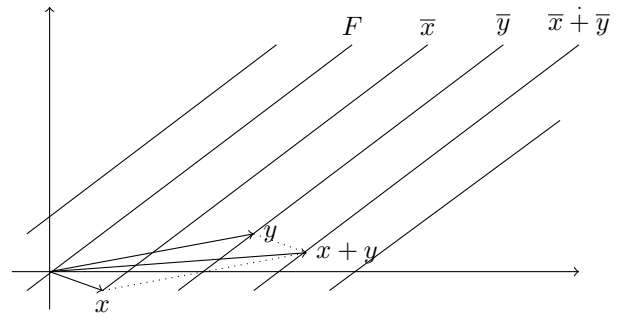
Proposition-définition 37 Soit E un espace vectoriel, F un sous-espace vectoriel de E et $E/F := \{x + F\}_{x \in E}$ l'espace quotient. On munit E/F des lois quotients

$$\begin{aligned} \bar{x} + \bar{y} &:= \overline{x + y} \\ \lambda \cdot \bar{x} &:= \overline{\lambda x} \end{aligned}$$

(i.e.)

$$\begin{aligned} (x + F) + (y + F) &= (x + y) + F \\ \lambda \cdot (x + F) &:= \lambda x + F \end{aligned}$$

E/F muni des lois quotients est un espace vectoriel.

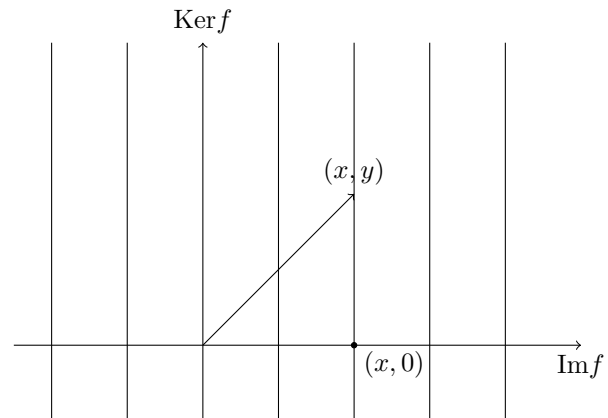


Théorème 38 Soient E et E' deux espaces vectoriels et $f : E \rightarrow E'$ une application linéaire. Alors

$$E/\text{Ker} f \simeq \text{Im} f$$

Exemple 39 En considérant l'application

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\mapsto (x, 0) \end{aligned}$$



$E/\text{Ker} f = \{\text{droites parallèles à } 0y\}$. L'application f fait correspondre à la droite (x) son intersection avec la droite $\text{Im} f$ (i.e.) l'axe $0x$.

Corollaire 40 Si E est de dimension finie, on a

$$\dim E/F = \dim E - \dim F$$

Corollaire 41 Soient E_1 et E_2 deux sous-espaces vectoriels de E . Alors

$$\frac{E_1 \oplus E_2}{E_2} \simeq E_1$$

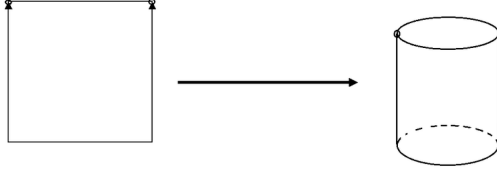
Exemple 42 Construction du cylindre

Le cylindre peut-être défini comme l'espace quotient

$$\mathcal{C} = \mathbb{R}^2/\mathcal{R}$$

où

$$(x_1, y_1) \sim_{\mathcal{R}} (x_2, y_2) \Leftrightarrow \begin{cases} \exists k \in \mathbb{Z} \text{ tel que :} \\ x_2 = x_1 + 2k\pi R \\ y_1 = y_2 \end{cases}$$



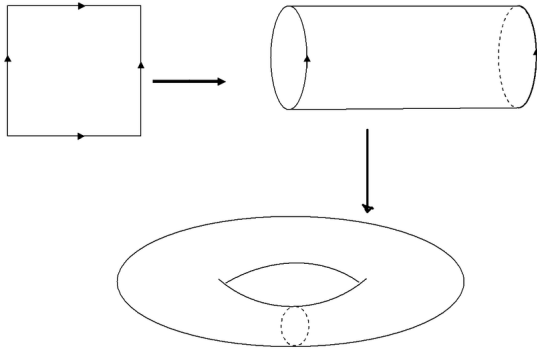
Construction du tore

Le cylindre peut-être défini comme l'espace quotient

$$\mathcal{T} = \mathbb{R}^2 / \mathcal{R}$$

où

$$(x_1, y_1) \sim_{\mathcal{R}} (x_2, y_2) \Leftrightarrow \begin{cases} \exists k, h \in \mathbb{Z} \text{ tel que :} \\ x_2 = x_1 + 2k\pi R_1 \\ y_1 = y_2 + 2h\pi R_2 \end{cases}$$



4 Représentations linéaires de groupes

4.1 Définitions et premières propriétés [PEY] p.194 → 205

Définition 43 Soit V un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de dimension finie n . Une représentation linéaire d'un groupe G dans V est la donnée d'un morphisme $\rho : G \rightarrow \text{GL}(V)$. Ceci correspond à la donnée d'une action linéaire du groupe G sur V :

$$\begin{aligned} G \times V &\rightarrow V \\ (g, v) &\mapsto g.v = \rho(g)(v) \end{aligned}$$

Une représentation ρ est dite fidèle si G agit fidèlement sur V .

Exemple 44 Pour deux représentations ρ_V et ρ_W respectivement sur V et W , on définit une

représentation des morphismes $\rho_{\mathcal{L}(V,W)}$ sur $\mathcal{L}(V, W)$ par

$$\forall g \in G, \forall f \in \mathcal{L}(V, W),$$

$$\rho_{\mathcal{L}(V,W)}(g)(f) := \rho_W(g) \circ f \circ \rho_V(g^{-1})$$

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{f} & W \\ \rho_V(g) \downarrow & & \downarrow \rho_W(g) \\ V & \xrightarrow{\rho_{\mathcal{L}(V,W)}(g)} & W \end{array}$$

Définition 45 • Soient ρ et ρ' deux représentations d'un même groupe G respectivement sur deux $\mathbb{C}$ -espace vectoriel V et V' . Un opérateur d'entrelacement est une application linéaire $\tau : V \rightarrow V'$ tel que pour tout $g \in G$, $\tau \circ \rho(g) = \rho'(g) \circ \tau$

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{\tau} & V' \\ \rho(g) \downarrow & & \downarrow \rho'(g) \\ V & \xrightarrow{\tau} & V' \end{array}$$

• Deux représentations ρ et ρ' d'un même groupe G respectivement sur deux $\mathbb{C}$ -espace vectoriel V et V' sont dites isomorphes si τ est bijective.

Définition 46 • Si une représentation ρ de G sur V admet un sous-espace vectoriel $W \subset V$ stable pour tous les $\rho(g) \in \text{GL}(V)$, elle induit une représentation ρ_W sur W appelée sous-représentation.

• Une représentation sur un espace V est dite irréductible si elle admet exactement deux sous-représentations : $\{0\}$ et V tout entier.

Proposition 47 Toute représentation peut s'écrire comme somme de représentations irréductibles.

Proposition 48 Lemme de Schur :

Soient ρ et ρ' deux représentations irréductibles d'un groupe G respectivement sur deux $\mathbb{C}$ -espace vectoriel V et V' et $f \in \mathcal{L}(V, V')$ un opérateur d'entrelacement. Alors

(i) si ρ et ρ' ne sont pas isomorphes, $f = 0$.

(ii) Si $f \neq 0$, alors f est un isomorphisme.

Si on suppose $V = V'$, alors f est une homothétie.

Proposition 49 Soit $N \triangleleft G$. On note ρ_U la représentation régulière de G/N . Alors il existe une représentation canonique $\tilde{\rho}_U$ de G sur U telle que les sous-représentations de U sous l'action de G/N soient exactement celles de U sous l'action de G .

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{\tilde{\rho}_U} & \text{GL}(U) \\ & \searrow \pi & \nearrow \rho_U \\ & G/N & \end{array}$$

4.2 Caractères [PEY] p.207 → 226

Définition 50 Soit ρ une représentation d'un groupe G sur un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel V de dimension n .

On lui associe son caractère χ_ρ défini par $\chi_\rho(g) = \text{tr}(\rho(g))$, où tr désigne la trace.

C'est une fonction de G dans $\mathbb{C}$, (i.e.) $\chi_\rho \in \mathbb{C}[G]$.

Proposition 51 Soient χ_ρ et $\chi_{\rho'}$ deux caractères de représentations irréductibles. Alors

(i) χ_ρ est le caractère d'une représentation irréductible si et seulement si

$$\langle \chi_\rho, \chi_\rho \rangle := \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi_\rho(g) \overline{\chi_\rho(g)} = 1$$

(ii) Si χ_ρ et $\chi_{\rho'}$ deux caractères de représentations irréductibles non isomorphes, alors $\langle \chi_\rho, \chi_{\rho'} \rangle = 0$

Proposition 52 En notant $(\chi_i)_{i=1}^p$ les caractères irréductibles de G et $(C_i)_{i=1}^p$ les classes de conjugaison de G , on a :

(i) Formule de Burnside : $\sum_{i=1}^p \chi_i(1)^2 = |G|$

(ii) Orthogonalité des caractères :

$$\sum_{i=1}^p \chi_i(C_k) \overline{\chi_i(C_l)} = 0 \text{ pour } k \neq l.$$

Définition 53 Une table des caractères est un tableau constitué des éléments de la matrice $(\chi_i(C_j))_{1 \leq i, j \leq p}$.

	1	$ C_1 $	...	$ C_p $
	1	C_1	...	C_p
$\chi_1 = \mathbb{1}$	1	1	...	1
χ_2	$\chi_2(1)$	$\chi_2(C_2)$	...	$\chi_2(C_p)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
χ_p	$\chi_p(1)$	$\chi_p(C_2)$	...	$\chi_p(C_p)$

4.3 Espace des fonctions centrales [PEY] p.213 → 215

Définition 54 Une fonction $\varphi : G \rightarrow \mathbb{C}$ est dite centrale si elle vérifie

$$\forall g, h \in G, \varphi(ghg^{-1}) = \varphi(h)$$

On note $\mathbb{C}[G]^G$ l'ensemble des fonctions centrales : c'est un sous-espace vectoriel de l'espace $\mathbb{C}[G]$.

Proposition 55 En notant $\{C_1, \dots, C_q\}$ les différentes classes de conjugaison de G , les fonctions $f_{C_1}, \dots, f_{C_q}$ définies par

$$\forall g \in G, f_{C_i}(g) = \begin{cases} 1 & \text{si } g \in C_i \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

forment une base de l'espace vectoriel $\mathbb{C}[G]^G$.

En particulier, $\dim(\mathbb{C}[G]^G) = q$ (nombre de classes de conjugaisons de G)

Théorème 56 $(\chi_\rho)_{\rho \in \widehat{G}} = (\chi_i)_{i=1}^p$ forme une base orthonormale de l'espace $\mathbb{C}[G]^G$.

Corollaire 57 Le nombre de représentations irréductibles sur G non isomorphes est égal au nombre de classes de conjugaisons de G .

Corollaire 58 G est abélien si et seulement si toutes ses représentations irréductibles sont de degré 1.

4.4 Noyau de caractères [PEY] p.230 → 232

Proposition 59 Soit G un groupe fini et $\rho : G \rightarrow \text{GL}(V)$ une représentation, de caractère χ_V sur un espace V de dimension d . On note $g \in G$ un élément d'ordre k . Alors :

(i) $\rho(g)$ est diagonalisable.

(ii) χ_V est somme de $\chi_V(1) = \dim V = d$ racines $k^{\text{ième}}$ de l'unité.

(iii) $|\chi_V(g)| \leq \chi_V(1) = d$.

(iv) $K_{\chi_V} := \{g \in G \mid \chi_V(g) = \chi_V(1)\}$ est un sous-groupe distingué de G . On le nomme le noyau de la représentation.

Proposition 60 Soient G un groupe fini, et $\widehat{G} = \{\rho_1, \dots, \rho_r\}$ son dual, formé de représentants des représentations irréductibles non isomorphes. Les sous-groupes distingués d'un groupe fini G sont exactement du type

$$\bigcap_{i \in I} \{g \in G \mid \chi_i(g) = \chi_i(e)\} \text{ où } I \subset \{1, \dots, r\}$$

Corollaire 61 G est simple si et seulement si pour tout $i \neq 1$, pour tout $g \in G \setminus \{e\}$, $\chi_i(g) \neq \chi_i(e)$.

Questions

Exercice : A tout sous-groupe H d'un groupe G , on peut associer deux relations $\mathcal{R}_H$ et ${}_H\mathcal{R}$, définies dans G par :

$$x\mathcal{R}_Hy \Leftrightarrow xy^{-1} \in H \text{ et } x{}_H\mathcal{R}y \Leftrightarrow x^{-1}y \in H$$

Les ensembles quotients $\frac{G}{\mathcal{R}_H}$ et $\frac{G}{{}_H\mathcal{R}}$ sont respectivement notés $(\frac{G}{H})_d$ et $(\frac{G}{H})_g$.

1) Montrer que les relations $\mathcal{R}_H$ et ${}_H\mathcal{R}$ sont des relations d'équivalence.

2) Montrer que

$$\begin{aligned} y \equiv x \pmod{\mathcal{R}_H} &\Leftrightarrow y \in Hx, \text{ où } Hx := \{hx ; h \in H\} \\ y \equiv x \pmod{{}_H\mathcal{R}} &\Leftrightarrow y \in xH, \text{ où } xH := \{xh ; h \in H\} \end{aligned}$$

3) Pour tout sous-groupe H d'un groupe G , les ensembles $(\frac{G}{H})_d$ et $(\frac{G}{H})_g$ sont équipotents.

Solution : 1) Faisons la démonstration pour la relation $\mathcal{R}_H$.

→ *Réflexivité :* Pour tout $x \in G$, $xx^{-1} = e \in H$, donc $x\mathcal{R}_Hx$.

→ *Symétrie :* Pour tout $x, y \in H$, alors $(xy^{-1})^{-1} = yx^{-1} \in H$, donc $x\mathcal{R}_Hy \Rightarrow y\mathcal{R}_Hx$.

→ *Transitivité :* Pour tout $x, y, z \in H$, alors $xy^{-1} \in H$ et $yz^{-1} \in H$, alors on a $xy^{-1}yz^{-1} = xz^{-1} \in H$. Par suite,

$$x\mathcal{R}_Hy \text{ et } y\mathcal{R}_Hz \Rightarrow x\mathcal{R}_Hz$$

2) Faisons encore la démonstration pour la relation $\mathcal{R}_H$.

$$y \equiv x \pmod{\mathcal{R}_H} \Leftrightarrow yx^{-1} \in H \Leftrightarrow \exists h \in H, y = hx \Leftrightarrow y \in Hx$$

3) Considérons l'application

$$\begin{aligned} \theta : \left(\frac{G}{H}\right)_d &\rightarrow \left(\frac{G}{H}\right)_g \\ Hx &\mapsto x^{-1}H \end{aligned}$$

→ Montrons que cette application est bien définie (*i.e.*) $Hx = Hy \Rightarrow x^{-1}H = y^{-1}H$. Or

$$Hx = Hy \Leftrightarrow xy^{-1} \in H \Rightarrow y^{-1} \in x^{-1}H \Rightarrow y^{-1}H = x^{-1}H$$

→ θ est injective. En effet,

$$\theta(Hx) = \theta(Hy) \Rightarrow x^{-1}H = y^{-1}H \Rightarrow xy^{-1} \in H \Leftrightarrow Hx = Hy$$

→ θ est surjective. En effet, tout élément xH de $(\frac{G}{H})_g$ peut s'écrire $xH = \theta(Hx^{-1})$.

Donc θ est une bijection. D'où le résultat.

Exercice : Théorèmes d'isomorphismes

1) *1^{er} théorème d'isomorphisme :* Soient G un groupe, $H \triangleleft G$ et $\pi : G \rightarrow \frac{G}{H}$ la projection canonique. Montrer que, quelque soient le groupe G' et le morphisme $f : G \rightarrow G'$ tel que $H \subseteq \text{Ker } f$, il existe un unique morphisme $\varphi : \frac{G}{H} \rightarrow G'$ tel que $\varphi \circ \pi = f$.

2) *2^{eme} théorème d'isomorphisme :* Soient G un groupe, $H \triangleleft G$. Montrer que pour tout sous-groupe K de G , les groupes quotients $\frac{K}{H \cap K}$ et $\frac{HK}{H}$ existent et on a

$$\frac{K}{H \cap K} \xrightarrow{\sim} \frac{HK}{H}$$

3) *3^{eme} théorème d'isomorphisme :* Soient H et K deux sous-groupes distingués d'un groupe G tels que $H \subseteq K$. Montrer que l'on a

$$\frac{G}{K} \xrightarrow{\sim} \frac{\frac{G}{H}}{\frac{K}{H}}$$

Solution : 1) Considérons le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{\pi} & \frac{G}{H} \\ & \searrow f & \swarrow \varphi \\ & \text{Im} f \subseteq G' & \end{array}$$

où φ est l'application que l'on définit comme suit

$$\begin{aligned} \varphi : \frac{G}{H} &\rightarrow G' \\ \bar{x} &\mapsto f(x) \end{aligned}$$

Etape 1 - Montrons que φ est bien définie et que c'est un morphisme :

Soit $\bar{x}, \bar{x}' \in G/H$ tel que $\bar{x} = \bar{x}'$. Par définition, on a

$$\bar{x} = \bar{x}' \text{ dans } \frac{G}{H} \Leftrightarrow xx'^{-1} \in H$$

et comme $H \subseteq \text{Ker} f$, on a donc

$$f(xx'^{-1}) = e'$$

où e' est l'élément neutre de G' . Mais alors,

$$e' = f(xx'^{-1}) = f(x)f(x')^{-1} \Rightarrow f(x) = f(x')$$

Donc φ est bien définie.

De plus, φ est un morphisme. En effet, pour tous $\bar{x}, \bar{y} \in G/H$, on a

$$\varphi(\bar{x} \bar{y}) = \varphi(\overline{xy}) = f(xy) \underset{\text{f morph.}}{=} f(x)f(y) = \varphi(\bar{x})\varphi(\bar{y})$$

Etape 2 - Montrons que le diagramme commute et que φ est unique :

Comme $\pi(x) = \bar{x}$ pour tout $x \in G$, on a bien $\varphi \circ \pi = f$ (i.e.) que le diagramme commute.

Supposons, pour finir, qu'il existe un morphisme $\varphi' : \frac{G}{H} \rightarrow G'$ tel que $\varphi' \circ \pi = f$. Alors, pour tout $\bar{x} \in G/H$, on a

$$\varphi'(\bar{x}) = \varphi' \circ \pi(x) = f(x)$$

Ainsi, $\varphi(\bar{x}) = \varphi'(\bar{x})$, et donc $\varphi' = \varphi$.

2) Etape 1 - Montrons d'abord le petit lemme suivant :

Lemme : Soient deux groupes G et G' . Etant donné $H \triangleleft G$, $H' \triangleleft G'$ et $f \in \text{Hom}(G, G')$ tel que $f(H) \subseteq H'$, il existe un unique morphisme $\bar{f} \in \text{Hom}\left(\frac{G}{H}, \frac{G'}{H'}\right)$ tel que

$$\bar{f} \circ \pi = \pi' \circ f \quad \text{où } \pi : G \rightarrow \frac{G}{H} \text{ et } \pi' : G' \rightarrow \frac{G'}{H'}$$

Démonstration :

On va tenter de se ramener au premier théorème d'isomorphisme. Remarquons que

$$f(H) \subseteq H' \Leftrightarrow H \subseteq f^{-1}(H')$$

De plus, e' étant l'élément neutre de G' , on a :

$$\begin{aligned}\text{Ker}(\pi' \circ f) &= \{x \in G \mid \pi'(e')\} \\ &= \{x \in G \mid f(x) \in H'\} \\ &= f^{-1}(H')\end{aligned}$$

Ainsi, on a donc $H \subseteq \text{Ker}(\pi' \circ f)$. Ce qui implique, d'après le premier théorème d'isomorphisme, qu'il existe unique morphisme $\bar{f} \in \text{Hom}\left(\frac{G}{H}, \frac{G'}{H'}\right)$ tel que

$$\bar{f} \circ \pi = \pi' \circ f \quad \text{où } \pi : G \rightarrow \frac{G}{H} \text{ et } \pi' : G' \rightarrow \frac{G'}{H'}$$

D'où le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{f} & G' \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi' \\ \frac{G}{H} & \xrightarrow{\exists! \bar{f}} & \frac{G'}{H'} \end{array}$$

□

Etape 2 - Montrons que les groupes quotients $\frac{K}{H \cap K}$ et $\frac{HK}{H}$ existent :

Puisque $H \triangleleft G$, on a $H \cap K \triangleleft K$. Donc $\frac{K}{H \cap K}$ existe bien.

Montrons maintenant que HK est un sous-groupe de G . On aura besoin du lemme suivant :

Lemme : Soient H et K deux sous-groupes d'un groupe G . Alors :

- (i) KH est un sous-groupe de G si et seulement si $HK = KH$.
- (ii) Si $H \triangleleft G$, alors HK est un sous-groupe de G et $H \triangleleft HK$.

Démonstration :

(i) $\Rightarrow$: Supposons $HK \leq G$. Soit $x \in H$ et $y \in K$, on a donc

$$yx = (x^{-1}y^{-1})^{-1}$$

D'où yx est l'inverse d'un élément du sous-groupe HK , et ainsi $yx \in HK$ et donc $KH \subseteq HK$.

Soit maintenant $z \in HK$, alors $z^{-1} \in HK$, et donc il existe $x' \in H$ et $y' \in K$ tels que $z^{-1} = x'y'$. Par suite, $z = y'^{-1}x'^{-1} \in KH$, d'où $HK \subseteq KH$.

Par conséquent, HK est un sous-groupe de G implique $HK = KH$.

$\Leftarrow$: Supposons donc que $HK = KH$. Comme $e \in HK$, alors $HK \neq \emptyset$. Soient $x, x_1 \in H$ et $y, y_1 \in K$. Alors

$$(xy)(x_1y_1)^{-1} = x \underbrace{(yy_1^{-1})}_{\in K} \underbrace{x_1^{-1}}_{\in H}$$

Comme $HK = KH$, il existe $x_2 \in H$ et $y_2 \in K$ tels que

$$yy_1^{-1}x_1^{-1} = x_2y_2$$

Par conséquent, on a donc

$$(xy)(x_1y_1)^{-1} = xx_2y_2 \in HK$$

Donc HK est un sous-groupe de G .

(ii) Montrons que $H \triangleleft G$ implique $HK = KH$ ce qui prouvera le résultat.

Soit $h \in H$ et $k \in K$. Alors

$$H \triangleleft G \Rightarrow k^{-1}hk \in H$$

donc il existe $h' \in H$ tel que $k^{-1}hk = h'$ (i.e.) $hk = kh'$, d'où $HK \subseteq KH$. On procède de même pour avoir $KH \subseteq HK$.

Ainsi, HK est un sous-groupe de G et comme $H \triangleleft G$, on a bien $H \triangleleft HK$

□

Par conséquent, $\frac{HK}{H}$ existe bien.

Etape 3 - On termine ... :

Notons l'injection canonique $j : K \rightarrow HK$, et les projections canoniques $\pi : K \rightarrow \frac{K}{H \cap K}$ et $\pi' : HK \rightarrow \frac{HK}{H}$. On a

$$j(H \cap K) = H \cap K \Rightarrow j(H \cap K) \subseteq H$$

Notre petit lemme implique l'existence d'un unique morphisme $\varphi \in \text{Hom}\left(\frac{K}{H \cap K}, \frac{HK}{H}\right)$ tel que $\varphi \circ \pi = \pi' \circ j$

$$\begin{array}{ccc} K & \xrightarrow{j} & HK \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi' \\ \frac{K}{H \cap K} & \xrightarrow{\exists! \varphi} & \frac{HK}{H} \end{array}$$

Par ailleurs, $\pi' \circ j$ est surjectif. En effet,

$$\pi' \circ j(K) = \pi'(K) = \frac{HK}{H}$$

Par suite, φ est surjectif.

D'autre part, $j^{-1}(H) = H \cap K$, puisque $j(x) = x$ pour tout $x \in K$. Donc j est injectif et par conséquent, φ est un isomorphisme.

3) Notons les projections canoniques $\sigma : G \rightarrow \frac{G}{H}$, $\pi : G \rightarrow \frac{G}{K}$, et $\pi : \frac{G}{H} \rightarrow \frac{\frac{G}{H}}{\frac{K}{H}}$. Alors on a

$$H \subseteq K \Rightarrow \sigma(K) = \frac{K}{H} \text{ est un sous-groupe de } \frac{G}{H}$$

Toujours, d'après notre petit lemme, il existe un unique morphisme $\bar{\sigma} \in \text{Hom}\left(\frac{G}{K}, \frac{\frac{G}{H}}{\frac{K}{H}}\right)$ tel que $\bar{\sigma} \circ \pi = \pi' \circ \sigma$:

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{\sigma} & \frac{G}{H} \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi' \\ \frac{G}{K} & \xrightarrow{\exists! \bar{\sigma}} & \frac{\frac{G}{H}}{\frac{K}{H}} \end{array}$$

π' et σ étant surjectifs, on a que $\pi' \circ \sigma$ est surjectif, donc $\bar{\sigma}$ est surjectif.

Comme $\text{Ker}(\pi' \circ \sigma) = K$, donc $\bar{\sigma}$ est injectif. Par conséquent, $\bar{\sigma}$ est un isomorphisme.