Leçon 264 : Variables aléatoires discrètes. Exemples et applications.

Dans cette leçon, $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ désigne un espace probabilisé.

1 Définition et premières propriétés

Définition 1. Une variable aléatoire réelle X définie sur Ω est une application $X : \Omega \to \mathbb{R}$ mesurable, c'est à dire, pour tout $a \leqslant b \in \mathbb{R}$, on a $X^{-1}(]a, b[) \in \mathcal{F}$.

Définition 2. Une variable aléatoire (réelle) discrète sur $(\Omega, \mathcal{F})$ est une variable aléatoire X telle que $X(\Omega)$ est un ensemble réel fini ou dénombrable. On notera $X(\Omega) = \{x_k, k \in K\}$ où $K = \{1, ..., n\}$ ou $K = \mathbb{N}$.

1.1 Loi d'une variable aléatoire discrète

Définition 3. La loi d'une variable aléatoire est la probabilité image $\mathbb{P}_X = \mathbb{P} \circ X^{-1}$. Décrire la loi de X c'est donc décrire $\mathbb{P}(X \in A)$ pour les boréliens A de $\mathbb{R}$. Dans le cas d'une variable aléatoire discrète, sa loi est caractérisée par les probabilités atomiques $p_k = \mathbb{P}(X = x_k)$.

Exemple 4. On considère une Urne constituée de n boules numérotées de 1 à n. On tire au hasard une de ces boules et on note X la variable aléatoire qui associe le numéro de la boule tirée. X est alors une variable aléatoire discrète telle que $p_k = \frac{1}{n}$ pour tout k. On dit que X suit une loi uniforme sur $\{1, ..., n\}$.

Exemple 5. Soit X une v.a.d, et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Alors $Y = f(X)$ est une v.a.d et $\mathbb{P}(Y = k) = \sum_{l \in f^{-1}(\{k\})} \mathbb{P}(X = l)$.

Définition 6. Si X est une v.a.r, la Fonction de répartition de X est l'application :

$$F : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & [0,1] \\ x & \to & \mathbb{P}(X \leqslant x) \end{array}$$

Exemple 7. Si X est à valeur dans $\mathbb{Z}$, alors $\mathbb{P}(X \leqslant t) = \sum_{k \leqslant \lfloor t \rfloor} \mathbb{P}(X = k)$.

Proposition 8. *Soit X une variable aléatoire réelle de fonction de répartition F.*
(i) F est croissante sur $\mathbb{R}$, continue à droite.
(ii) $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 1$
(iii) F est continue en x SSI $\mathbb{P}(X = x) = 0$. Dans le cas contraire, on obtient : $\mathbb{P}(X = x) = \lim\limits_{y \to x^+} F(y) - \lim\limits_{y \to x^-} F(y)$.
(iv) F caractérise la loi de X.

1.2 Moments

Définition 9. Soit X une variable aléatoire discrète. si la série $\sum |x_k| p_k$ converge, on dit que X est d'espérance finie et dans ce cas, on note $\mathbb{E}[X] = \sum_{k=0}^{+\infty} x_k p_k$ son espérance.

Exemple 10. Si X suit une loi uniforme sur $\{1, ..., n\}$, alors $\mathbb{E}[X] = \frac{n+1}{2}$.

Proposition 11. *Soient X et Y des v.a.d.*
(i) l'espérance est linéaire.
(ii) si $X \leqslant Y$, alors $\mathbb{E}[X] \leqslant \mathbb{E}[Y]$
(iii) si $X \geqslant 0$ et $\mathbb{E}[X] = 0$, alors $X = 0$ p.s.
(iv) $|\mathbb{E}[X]| \leqslant \mathbb{E}[|X|]$.

Théorème 12 (Théorème de transfert)**.** *Soit X une v.a.d et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction. La variable aléatoire $f(X)$ est d'espérance finie SSI $\sum_k f(x_k) p_k$ converge absolument et dans ce cas, $\mathbb{E}[f(X)] = \sum_{k=0}^{+\infty} f(x_k) p_k$.*

Définition 13. Soit X une v.a.d d'espérance finie telle que X^2 est d'espérance finie. On dit alors que X est de *variance* finie et on appelle variance de X la quantité : $Var(X) = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2$.

Exemple 14. Si X suit une loi uniforme sur $\{1, ..., n\}$, alors $Var(X) = \frac{n^2-1}{12}$

Proposition 15 (Inégalité de Markov)**.** *Soit X une variable aléatoire positive. Alors pour tout $t > 0$, $\mathbb{P}(X \geqslant t) \leqslant \frac{\mathbb{E}[X]}{t}$.*

Corollaire 16 (Inégalité de Bienaymé Tchebychev)**.** *Soit X une v.a.r, alors pour tout $t > 0$, $\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}[X]| \geqslant t) \leqslant \frac{Var(X)}{t^2}$.*

1.3 Indépendance

Définition 17. Soit $(X_n)_{n \in N}$ une suite de v.a.r (avec N fini ou dénombrable), on dit qu'elles sont indépendantes si pour toute partie finie $I \subset \mathbb{N}$ et pour toute suite $(B_i)_{i \in I}$ de boréliens, on a :

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i\in I}\{X_i \in B_i\}\right) = \prod_{i\in I}\mathbb{P}(X \in B_i).$$

Proposition 18. *Soit $(X_n)_{n\in N}$ une famille de v.a.d (avec N fini ou dénombrable), alors elles sont indépendantes SSI pour toute partie finie $I \subset \mathbb{N}$ et pour tout $x_i \in X_i(\Omega)$, on a :*

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i\in I}\{X_i = x_i\}\right) = \prod_{i\in I}\mathbb{P}(X = x_i).$$

Exemple 19. Si X et Y sont indépendantes à valeurs dans $\mathbb{Z}$, alors pour tout $k \in \mathbb{Z}$, on a $\mathbb{P}(X+Y=k) = \displaystyle\sum_{s\in\mathbb{Z}}\mathbb{P}(X=s)\mathbb{P}(Y=k-s)$

2 Lois Classiques

Définition 20. On considère une expérience aléatoire n'ayant que deux issues possibles appelées succès et échec (épreuve de Bernoulli). Soit $0 < p < 1$, on associe au succès la probabilité p et à l'échec la probabilité $1-p$. On note X la variable aléatoire qui vaut 1 en cas de succès et 0 sinon. On dit alors que X suit la loi de Bernoulli de paramètre p et on écrit $X \rightsquigarrow \mathcal{B}(p)$.

Exemple 21. Soit A un événement de Ω, alors la v.a $\mathbf{1}_A$ suit la loi de Bernoulli de paramètre $\mathbb{P}(A)$.

Application 22. *Soient $u_1, ..., u_d \in \mathbb{R}^d$, muni de la structure euclidienne, des vecteurs de norme au plus 1. Soient $p_1, ..., p_d \in [0,1]$ et $\omega = \sum_{i=1}^d p_i u_i$. Alors il existe $\epsilon_1, ..., \epsilon_d \in \{0,1\}$ tels que $\left\|\omega - \sum_{i=1}^d \epsilon_i u_i\right\| \leqslant \frac{\sqrt{d}}{2}$.*

Définition 23. On modélise une expérience consistant à la réalisation de n épreuves de Bernoulli de même loi $\mathcal{B}(p)$. On note X le nombre de succès. (Par exemple on lance n fois une pièce ayant pour probabilité p de tomber sur pile (succès)). X peut prendre les valeurs $1, ..., n$ et $\mathbb{P}(X=k) = \binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$. On dit alors que X suit la loi Binomiale de paramètre n, p et on note $X \rightsquigarrow \mathcal{B}(n,p)$.

Application 24 (DEV 1). *Soit $f \in \mathcal{C}^0([0,1])$, on lui associe le n-ème polynôme de Bernstein : $B_n(f)(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f\left(\frac{k}{n}\right) x^k(1-x)^{n-k}$. Alors on a :*
(i) $\|B_n(f) - f\|_\infty \leqslant C\omega_f\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$, où ω_f est le module de continuité de f.
(ii) Il existe une fonction lipschitzienne f telle que $\|B_n(f) - f\|_\infty \geqslant C_0\omega(\frac{1}{\sqrt{n}})$.

Définition 25. On considère la même succession d'épreuves de Bernoulli qu'avant, cette fois-ci, on se donne une infinité dénombrable de tirage, et on note X le numéro du premier succès obtenu. X est alors une v.a.d à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ et pour tout k dans $\mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(X=k) = (1-p)^{k-1}p$. On dit alors que X suit la loi géométrique de paramètre p et on note $X \rightsquigarrow \mathcal{G}(p)$.

Définition 26. Soit $\lambda > 0$. On dit qu'une v.a.d X suit une loi de Poisson de paramètre λ si $X(\Omega) = \mathbb{N}$ et si pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(X=k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$. On note $X \rightsquigarrow \mathcal{P}(\lambda)$.

Proposition 27. *Soit $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels tels que $0 < p_n < 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et vérifiant $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} np_n = \lambda$. On note X_n une v.a de loi $\mathcal{B}(n, p_n)$. Alors pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\mathbb{P}(X_n = k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$.*

3 Caractérisation de loi

3.1 Étude des variables à valeurs dans $\mathbb{N}$

Définition 28. Soit X une v.a à valeurs dans $\mathbb{N}$, on définit la fonction génératrice de X par $G(t) = G_X(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} p_k t^k$.

Remarque 29. $G_X(t)$ vaut également $\mathbb{E}[t^X]$ lorsque la série converge absolument.

Théorème 30. *(i) Le rayon de convergence de G vaut au moins 1, et G est bien défini sur $[-1,1]$, de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-1,1[$.*
(ii) $G(1) = 1$ et les dérivées de G sont positives sur $[0,1]$ (en particulier, G y est croissante et convexe). De plus, $p_n = \frac{G^{(n)}(0)}{n!}$ pour tout entier $n \in \mathbb{N}$.
(iii) La fonction génératrice G de X caractérise la loi de X.
(iv) X est d'espérance finie SSI G est dérivable à gauche en 1 et dans ce cas, $\mathbb{E}[X] = G'(1)$.
(v) X est de variance finie SSI G est deux fois dérivable à gauche en 1 et dans ce cas, $Var(X) = G''(1) + G'(1) - G'(1)^2$.

Proposition 31. *Si X et Y sont deux v.a indépendantes à valeurs dans $\mathbb{N}$, alors $G_{X+Y} = G_X G_Y$.*

Application 32. *On ne peut pas truquer deux dés de sorte que la somme des 2 dés suive une loi uniforme sur $\{2, ..., 12\}$.*

Corollaire 33. *Soient λ et μ deux réels strictement positifs, $X \rightsquigarrow \mathcal{P}(\lambda)$ et $Y \rightsquigarrow \mathcal{P}(\mu)$ avec X indépendant de Y, alors $X + Y \rightsquigarrow \mathcal{P}(\lambda+\mu)$.*

Théorème 34. *Soit $(X_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de v.a indépendantes et de même loi à valeurs dans $\mathbb{N}$. Soit N une v.a dans $\mathbb{N}$ indépendante des X_i. On note $S = \sum_{k=0}^{N} X_k$, alors : $G_S = G_N \circ G_{X_1}$.*

Application 35. *Si $N \rightsquigarrow \mathcal{P}(\lambda)$ et $X_1 \rightsquigarrow \mathcal{B}(p)$, alors $S \rightsquigarrow \mathcal{P}(\lambda p)$.*

Application 36 (Processus de Galton Watson **DEV 2**). *On se donne X une variable aléatoire sur $\mathbb{N}$ et (X_k^n) une suite double de v.a indépendantes et de même loi que X. On pose*

$$\begin{cases} Z_0 & = & 1 \\ Z_{n+1} & = & \sum_{k=0}^{Z_n} X_k^n \end{cases}$$

On suppose que les X_k^n ont une espérance finie et on note $m = \mathbb{E}[X]$. On note $G(t) = G_X(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} p_k t^k$, avec $p_0 > 0$; $0 < p_0 + p_1 < 1$. On s'intéresse à la probabilité d'extinction, pour cela, on pose $x_n = \mathbb{P}(Z_n = 0)$. On a alors :
(i) Si on note $G_n = G_{Z_n}$, on a $G_n = G \circ ... \circ G$ ($n-$fois).
(ii) $(x_n)_n$ converge vers α qui est le plus petit point fixe dans $[0,1]$ de G.
(iii) $\alpha = 1$ si $m \leqslant 1$.
(iv) $0 < \alpha < 1$ si $m > 1$.

Application 37 (Division cellulaire). *On prend X qui est la loi $\mathbb{P}(X = 2) = p = 1 - \mathbb{P}(X = 0)$. Alors on a avec les notations précédentes : $\alpha = \min\left(1, \frac{1-p}{p}\right)$*

3.2 Étude des variables à valeurs dans $\mathbb{Z}$

Définition 38. Si X est une v.a.d à valeur dans $\mathbb{Z}$, sa fonction caractéristique est $\phi_X(t) = \mathbb{E}[e^{itX}] := \mathbb{E}[cos(tX)] + i\mathbb{E}[sin(tX)]$.

Exemple 39. Soit $\alpha > 0$. Alors ϕ_X est $\alpha-$périodique SSI $\mathbb{P}(X \in \frac{2\pi}{\alpha}\mathbb{Z}) = 1$.

Remarque 40. Si X est une v.a.d à valeurs dans $\mathbb{N}$, alors $\phi_X(t) = G_X(e^{it})$ $\forall t \in [-1,1]$.

Proposition 41. *Si X est un v.a.d à valeur dans $\mathbb{Z}$, alors pour tout $n \in \mathbb{Z}$ on a : $\mathbb{P}(X = n) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \phi_X(t)e^{-int}$.*

Corollaire 42. *ϕ_X caractérise la loi de X.*

Définition 43. On se donne une suite $(X_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de v.a indépendantes à valeurs dans $\{-1,1\}$ telles que $\mathbb{P}(X_k = 1) = p$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $S_n = \sum_{k=0}^{n} X_k$. Ceci définit une suite de v.a.d $(S_n)_n$ à valeurs dans $\mathbb{Z}$. Cette suite est appelée marche aléatoire simple sur $\mathbb{Z}$.

Exemple 44. Soit $(X_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de v.a indépendantes et de même loi, avec $\mathbb{P}(X_k = 1) = \mathbb{P}(X_k = -1) = \frac{1}{2}$, et $(S_n)_n$ définie comme précédemment. Alors :
$\mathbb{P}(S_{2n} = 0) = \frac{2}{\pi}W_{2n}$ où W_{2n} désigne l'intégrale de Wallis $\int_0^{\frac{\pi}{2}} cos(\theta)^{2n}d\theta$. On en déduit que $\mathbb{P}(S_{2n} = 0) \sim \frac{1}{\sqrt{\pi n}}$.

4 Convergence en loi

Définition 45. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de v.a.r sur $(\Omega_n, \mathcal{F}_n, \mathbb{P}_n)$, et X une v.a.r sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, on dit que X_n tend en loi vers X si $\lim_{n\to\infty} F_{X_n}(t) = F_X(t)$ en tout point t où F_X est continue. On note $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$

Exemple 46. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de v.a de loi $\mathcal{G}(\frac{p}{n})$ où $p > 0$. Alors $\frac{1}{n}X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$ avec $X \geqslant 0$ et $F_X(t) = 1 - e^{-pt}$ $\forall t \geqslant 0$ (On dit alors que X suit la loi exponentielle de paramètre p)

Théorème 47. *Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de v.a.d et X une v.a.d qui sont à valeurs dans un ensemble discret, alors :*

$$\begin{aligned} X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X &\iff \mathbb{P}(X_n = x_k) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathbb{P}(X = x_k) \text{ pour tout } k \in K. \\ &\iff G_{X_n}(t) \xrightarrow[n\to+\infty]{} G_X(t) \text{ pour tout } t \in [0,1[\text{ (si } X \text{ est à valeur dans } \mathbb{N}). \end{aligned}$$

Application 48 (Théorème des événements rares). *Soit $(X_{n,k})_{n,k\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de loi $\mathcal{B}(p_{n,k})$, où $p_{n,k} \in]0,1[$. On note $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_{n,k}$ et on suppose que $\sum_{k=0}^{n} p_{n,k} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \lambda$ et que $\max_{1\leqslant k\leqslant n} p_{n,k} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Alors $S_n \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{P}(\lambda)$.*

Théorème 49 (Théorème limite central). *Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires indépendantes, de même loi, et admettant une variance finie $\sigma^2 > 0$. On note $m = \mathbb{E}[X_1]$ et on pose $S_n = X_1 + ... + X_n$. Alors on a : $\frac{S_n - nm}{\sigma\sqrt{n}} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,1)$.*

Exemple 50. Si $X_n \rightsquigarrow \mathcal{B}(n,p)$ alors $\frac{X_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,1)$. Si $Y_n \rightsquigarrow \mathcal{P}(na)$ où $a > 0$, alors $\frac{Y_n - na}{\sqrt{na}} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,1)$.

Application 51 (Formule de Stirling). $n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$.

Table 1 – Lois classiques

Loi	Espérance	Variance	Fonction génératrice
$\mathcal{B}(p)$	p	$p(1-p)$	$1-p+pt$ sur $\mathbb{R}$
$\mathcal{B}(n,p)$	np	$np(1-p)$	$(1-p+pt)^n$ sur $\mathbb{R}$
$\mathcal{G}(p)$	$\frac{1}{p}$	$\frac{1-p}{p^2}$	$\frac{pt}{1-(1-p)t}$ sur $\left]-\frac{1}{1-p}, \frac{1}{1-p}\right[$
$\mathcal{P}(\lambda)$	λ	λ	$e^{\lambda(t-1)}$ sur $\mathbb{R}$

Développements

1. Polynômes de Bernstein **[24]**

2. Processus de Galton Watson **[36]** & **[34]**

Références

— **[A]** W.Appel, *Probabilités pour les nom-probabilistes (2^{e} édition).*
— **[B]** P.Barbe et M.Ledoux, *Probabilité.*
— **[G]** O.Garet et A.Kurtzmann, *De l'intégration aux probabilités.*
— **[Z]** CI.Zuily et H.Queffélec, *Éléments d'analyse (2^{e} édition).*