262 Convergences d'une suite de variables aléatoires, Théorèmes limites. Exemples et applications.

On se donne un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ et X désigne une variable aléatoire sur Ω à valeurs dans $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$. $\|.\|$ est une norme sur $\mathbb{R}^d$.

I. Convergence presque sûre et en probabilité

A p385

Def ① : Une suite de v.a $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur Ω converge presque sûrement (p.s) vers X si $\mathbb{P}(\lim_{+\infty} X_n = X) = 1$ on note alors $X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{p.s} X$

p114

Def ② : Soit $(A_n)_{n\geq 0}$ une suite d'événements, on définit $\limsup A_n = \bigcap_{N\geq 0} \bigcup_{n\geq N} A_n$ = " A_n infiniment souvent ".

et $\liminf A_n = \bigcup_{N\geq 0} \bigcap_{n\geq N} A_n$ = " A_n a.p.c.r ".

p117

Lemme ③ : (i) si $\sum \mathbb{P}(A_n)$ converge, alors $\mathbb{P}(\limsup A_n) = 0$

(ii) si les A_n sont deux à deux indep, et si $\sum \mathbb{P}(A_n)$ diverge, alors $\mathbb{P}(\limsup A_n) = 1$.

p387

prop ④ : (i) $X_n \to X$ p.s $\iff \forall \varepsilon\ \mathbb{P}(\sup_{n\geq N} \|X_n - X\| > \varepsilon) \xrightarrow[N\to+\infty]{} 0$

(ii) si $\sum \mathbb{P}(|X_n - X| > \varepsilon)$ converge $\forall \varepsilon > 0$, alors $X_n \xrightarrow{p.s} X$.

Def ⑤ : $(X_n)_n$ converge en probabilité vers X si $\forall \varepsilon > 0$
$\mathbb{P}(\|X_n - X\| > \varepsilon) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, on note $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$

p389

Thm ⑥ : (i) $X_n \xrightarrow{p.s} X \implies X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$

(ii) si $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$, on peut extraire une sous-suite vérifiant $X_{\varphi(n)} \xrightarrow{p.s} X$

p413

Ex ⑦ : • si $X_n \sim \mathcal{B}(\frac{1}{n})$ sont indep alors $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$ mais $X_n \overset{p.s}{\not\to} 0$.

• $(X_n)_n$ indep avec $X_n \sim \mathcal{B}(p_n)$. Alors :

$\begin{cases} X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} 0 \text{ ssi } p_n \to 0 \\ X_n \xrightarrow{p.s} 0 \text{ ssi } \sum p_n < +\infty \end{cases}$

prop ⑧ : Soit $g : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ continue, alors $X_n \xrightarrow[\mathbb{P}]{p.s} X \implies g(X_n) \xrightarrow[\mathbb{P}]{p.s} g(X)$.

II. Convergence dans $\mathbb{L}^p$ $p \geq 1$

p392

Def ⑨ : $(X_n)_n$ suite de v.a dans $\mathbb{L}^p$. X_n converge vers X dans $\mathbb{L}^p$ si $\mathbb{E}[\|X_n - X\|^p] \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, on note $X_n \xrightarrow{\mathbb{L}^p} X$

prop ⑩ : (Markov) si Y est un v.a positive alors
$\mathbb{P}(Y \geq t) \leq \frac{\mathbb{E}[Y]}{t} \quad \forall t > 0$.

(Hölder) : si $X \in \mathbb{L}^p$, $Y \in \mathbb{L}^q$ v.a.r avec $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ alors
$\mathbb{E}[|XY|] \leq \mathbb{E}[|X|^p]^{1/p}\, \mathbb{E}[|Y|^q]^{1/q}$.

cor ⑪ : (i) $X_n \xrightarrow{\mathbb{L}^1} X \implies X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$

(ii) $X_n \xrightarrow{\mathbb{L}^p} X \implies X_n \xrightarrow{\mathbb{L}^q} X$ où $1 \leq q \leq p$.

p392

Rq ⑫ (i) si si $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$ et $(X_n)_n$ bornée dans $\mathbb{L}^q$ $q \geq 2$, alors $\forall\ 1 \leq p < q$, $X_n \xrightarrow{\mathbb{L}^p} X$

BP 117

(ii) soit $\Omega =]0,1]$ muni de sa tribu borélienne et de la proba uniforme. Soit $\alpha > 0$ et $X_n(\omega) = \omega^{-\alpha} 1\!\!1_{]0,1/n]}(\omega)$ $(n \geq 1)$ alors $\forall \varepsilon \in]0,1[$, $\mathbb{P}(|X_n| \geq \varepsilon) = \frac{1}{n}$ donc $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$ mais $X_n \notin \mathbb{L}^p$ dès que $\alpha p \geq 1$

p118 [H] p365

(iii) on considère X_n de loi $(1 - \frac{1}{n^p})\delta_0 + \frac{1}{n^p}\delta_n$ $p > 1$ alors $\mathbb{P}(|X_n| > \varepsilon) = \frac{1}{n^p} \implies X_n \xrightarrow{p.s} X$ mais $\mathbb{E}[|X_n|^p] = 1 \not\to 0$

(iv) si $Y_n(\omega) = \sqrt{n}\, 1\!\!1_{]0,1/n]}$ alors $\mathbb{E}[X_n] = \frac{1}{\sqrt{n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et $\mathbb{E}[X_n^2] = 1 \not\to 0$

Ap 387 — prop 13 : si $\sum \mathbb{E}[|X_n - X|]$ converge, alors $X_n \xrightarrow{p.s} X$

prop 14 : (Bienaymé-Tchebytchev) : $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $X \in \mathbb{L}^k$ et $\varepsilon > 0$, alors $\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| \geq \varepsilon) \leq \dfrac{\mathbb{E}[|X - \mathbb{E}(X)|^k]}{\varepsilon^k}$.

G p241 — app 15 : (Loi faible des grands nombre) soit $(X_n)_n$ une suite de v.a iid d'espérance m et de variance σ^2 alors

$$Y_n = \frac{X_1 + \dots + X_n}{n} \xrightarrow{\mathbb{P},\, \mathbb{L}^2} m$$

III Convergence en loi.

G p265 — Def 16 : On dit qu'une suite de proba $(\mu_n)_n$ converge faiblement vers la proba μ si $\forall f$ continue bornée de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}$, on a $\lim_{n \to +\infty} \int_{\mathbb{R}^d} f \, d\mu_n = \int_{\mathbb{R}^d} f \, d\mu$

. on dit qu'une suite de v.a. $(X_n)_n$ converge en loi vers X si $\mathbb{P}_{X_n} \longrightarrow \mathbb{P}_X$ faiblement, c'est à dire si $\mathbb{E}[f(X_n)] \xrightarrow[n \to +\infty]{} \mathbb{E}[f(X)]$ pour toute fonction

G — prop 17 : si g continue sur $\mathbb{R}^d$ et $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$ alors $g(X_n) \xrightarrow{\mathcal{L}} g(X)$.

lemme 18 : (Scheffé) : soient f_n des applications positives intégrables par rapport à une mesure μ, vérifiant

(i) $f_n \longrightarrow f$ μ-pp

(ii) $\int_\Omega f_n \, d\mu \longrightarrow \int_\Omega f \, d\mu$

alors $f_n \xrightarrow{\mathbb{L}^1} f$.

cor 19 : (i) si $(X_n)_n$ est une suite de v.a à densité f_n et X de densité f, on suppose que $f_n \longrightarrow f$ μ-pp, alors $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$.

(ii) si X et $(X_n)_n$ sont des v.a.d à valeurs dans un ensemble D. On suppose que $\forall k \in D$ $\mathbb{P}(X_n = k) \xrightarrow[n \to +\infty]{} \mathbb{P}(X = k)$ — p267

app 20 : pour $n \geq 1$, soit $X_n \sim \mathcal{B}(n p_n)$. On suppose que $\lim_{n \to +\infty} n p_n = \lambda > 0$ alors $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{P}(\lambda)$.

Thm 21 : (Portemanteau) : on a équivalence entre :

(i) $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$

(ii) $\forall f$ unif continue bornée de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}$, $\mathbb{E}[f(X_n)] \xrightarrow[n \to +\infty]{} \mathbb{E}[f(X)]$

(iii) $\forall F$ fermé, $\mathbb{P}_X(F) \geq \overline{\lim}\, \mathbb{P}_{X_n}(F)$ — p269

(iv) $\forall O$ ouvert, $\mathbb{P}_X(O) \leq \underline{\lim}\, \mathbb{P}_{X_n}(O)$

(v) $\forall A$ borélien $_d$ tq $\mathbb{P}_X(\partial A) = 0$, on a $\lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}_{X_n}(A) = \mathbb{P}_X(A)$

(vi) $\forall$ pavé $A = \prod_{i=1}^{d}]a_i, b_i[$ dont la frontière ∂A vérifie $\mu(\partial A) = 0$, on a $\lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}_{X_n}(A) = \mathbb{P}_X(A)$.

cor 22 : soit X_n une suite de v.a.r, X une v.a de f.d.r F_X. On a équivalence entre — p273

(i) $(X_n)_n$ converge en loi vers X

(ii) $\forall x$ où F_X est continue, $F_{X_n}(x) \xrightarrow[n \to +\infty]{} F(x)$.

Ex 23 : Soit $(X_n)_n$ iid de loi Uniforme sur $[0,1]$ on note $M_n = \max_{1 \leq j \leq n} X_j$. Alors $M_n \xrightarrow{\mathcal{L}} 1$ et $n(1 - M_n) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{E}(1)$ — p283 et 442 p275

Thm 24 : on a : (i) $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X \implies X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$

(ii) $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} a \implies X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} a$

Lemme (Slutsky) 25 : si $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$ v.a dans $\mathbb{R}^d$ et $Y_n \xrightarrow{\mathcal{L}} c$ alors $(X_n, Y_n) \xrightarrow{\mathcal{L}} (X, c)$

app 26 : Dans ce cas, $\begin{cases} X_nY_n \to cX \\ X_n + Y_n \to X + c \end{cases}$ ce qui est utile combiné avec le TCL en stat.

p 213

Def 27 : on appelle fonction caractéristique de X la fonction $\phi : t \in \mathbb{R}^d \longmapsto \mathbb{E}[e^{i\langle t, x\rangle}]$.

p 210

Ex 16 : si $X \sim N(0,\sigma^2)$, $\varphi_X(t) = e^{-\frac{\sigma^2 t^2}{2}}$.

Thm 27 (Lévy) : on a :

(i) si $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$ alors $\phi_{X_n} \to \phi_X$ simplement sur $\mathbb{R}^d$

(ii) si $\forall t \in \mathbb{R}^d$, $\phi_{X_n}(t) \to \phi(t)$ où ϕ est une fonction continue en 0, alors $\exists X$ tq $\phi = \phi_X$ et de plus $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$.

IV. Théorèmes limites

p 248

Thm 28 : (LFGN L^2) soit $(X_n)_n$ une suite de v.a de carré intégrables, 2 à 2 non corrélées, tq $\sup_n \mathrm{Var} X_n < +\infty$ alors si $S_n = X_1 + \dots + X_n$, on a $\frac{S_n - \mathbb{E}[S_n]}{n} \xrightarrow{p.s} 0$

Ex 29 : (Estimateur) soit $X_1 \dots X_n$ des v.a iid de loi $N(\theta, 1)$, θ inconnu ; un estimateur de θ et $\overline{X_n} = \frac{X_1 + \dots + X_n}{n} \xrightarrow{p.s} \theta$.

Rq 30 : le Thm 28 est vrai si les X_n sont iid et seulement L^1. (admis)

Thm 31 (TCL) : Soit $(X_n)_n$ une suite de v.a.r iid ayant un moment d'ordre 2. on note $m = \mathbb{E}(X_1)$, $\sigma^2 = \mathrm{Var}(X_1)$ alors $\frac{(X_1 + \dots + X_n) - nm}{\sqrt{n}} \to N(0,\sigma^2)$

app 32 : $n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$

app 33 :

Références :
(A) Appel (Proba)
(B) Barbe Ledoux (Proba)
(H) Hauchecorne (Contre-Ex)
(G) Garet et Kurtzmann.