261 Loi d'une variable aléatoire : caractérisations, Ex et application

**Cadre :** On se place dans $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et $X : \Omega \to (\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$ désigne une variable aléatoire (vecteur aléatoire si $d \geq 2$) ie une fonction mesurable.
on suppose connu les notions d'indep, de mesure produit, de convolée

## I. Loi d'une variable aléatoire, définitions et 1er exemples

[G] p 103

**Def ①** : On appelle loi de $X$ notée $\mathbb{P}_X$ la mesure image de $\mathbb{P}$ par $X$ définie par $\forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$, $\mathbb{P}_X(A) = \mathbb{P}(X^{-1}(A))$.

p 117

**prop-def ②** : on dit que $X$ est discrète si $\exists D$ fini ou dénombrable dans $\mathbb{R}^d$ tq $\mathbb{P}(X \in D) = 1$. Dans ce cas, on pose $p_i := \mathbb{P}(X = x_i)$ où $D = \{x_i, i \in \mathbb{N}\}$ et $\forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$
$\mathbb{P}(X \in A) = \sum_{i \in D \cap A} p_i$ et $\mathbb{P}_X = \sum_{i \in D} p_i \delta_i$.

p 105

**Ex ③** : • si $\mathbb{P} = \frac{1}{3}\delta_{-1} + \frac{1}{2}\delta_0 + \frac{1}{6}\delta_1$ et $X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\omega \mapsto |\omega|$
on a $X(\Omega) = \{0, 1\}$ et $\mathbb{P}_X = \frac{1}{2}\delta_0 + \frac{1}{2}\delta_1$ (on dit que $X$ suit une loi de Berouilli de paramètre $p = \frac{1}{2}$)

• si $E \subset \Omega$ ensemble fini, $\mathbb{P} : \mathcal{P}(\Omega) \to [0,1]$, $A \mapsto \frac{|A \cap E|}{|E|}$ est appelée loi uniforme sur $E$.
$X$ suit une loi uniforme sur $E$ ssi $\forall x \in E$, $\mathbb{P}(X = x) = \frac{1}{|E|}$

p 123

• On appelle loi binomiale de paramètre $n, p$ noté $\mathcal{B}(n,p)$ la loi de la somme de $n$-variables de Bernouilli indep et de paramètre $p$. On a alors si $X \sim \mathcal{B}(n,p)$, $X(\Omega) = \{1, \dots, n\}$ et $\mathbb{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$.

• $X$ suit la loi géométrique de paramètre $p$ si $\forall k \in \mathbb{N}^*$ $\mathbb{P}(X = k) = (1-p)^{k-1} p$

• $X$ suit la loi de poisson de paramètre $\lambda > 0$ si l'on a $\forall k \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(X = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$.

## II. Fonction de répartition

p 104

**Def ④** : Soit $X$ un vecteur aléatoire de $\mathbb{R}^d$, on note $F_X$ sa f.d.r définie par $F_X(t_1, \dots, t_d) = \mathbb{P}(X_1 \leq t_1, \dots, X_d \leq t_d)$

**Thm ⑤** : $F_X$ caractérise la loi de $X$.

p 180

**app ⑥** : on dit que $X$ suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda$ si $\mathbb{P}(X \leq t) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda t} & \text{si } t \geq 0 \\ 0 & \text{si } t < 0 \end{cases}$

si $X \sim \mathcal{E}(1)$, $Y \sim \mathcal{E}(1)$ et $X \perp\!\!\!\perp Y$ alors $Z = \min(X, Y) \sim \mathcal{E}(2)$

**prop ⑦** : soit $X$ une v.a.r, alors $F_X$ vérifie :
(i) $F_X$ est croissante sur $\mathbb{R}$
(ii) $\lim_{t \to -\infty} F_X(t) = 0$ $\lim_{t \to +\infty} F_X(t) = 1$
(iii) $F_X$ est continue à droite, elle l'est à gauche en $x$ ssi $\mathbb{P}(X = x) = 0$

**Thm ⑧** (Helly) si $(F_n)_n$ est une ~~suite~~ suite de f.d.r, on peut extraire une sous suite $(F_{n_k})_k$ qui converge vers $F$ croissante, continue à droite en tout point de conti de $F$.

## III. Variables aléatoires à densité

p 120

**Def ⑨** : Une loi $\mu$ est à densité (/ lebesgue) s'il existe une fonction mesurable $f$ positive telle que $\mu(A) = \int_A f(\omega)\, d\lambda(\omega)$ $\forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$. Une v.a $X$ est dite à densité si $\mathbb{P}_X$ est à densité.

p 127

**Ex ⑩** : $X$ suit la loi uniforme sur $[a,b]$ si elle admet comme densité $x \mapsto \frac{1}{b-a} \mathbb{1}_{[a,b]}(x)$, on note $X \sim \mathcal{U}([a,b])$

prop 11 : Soit $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ croissante, continue à droite tq $\lim_{-\infty} f = 0$, $\lim_{+\infty} f = 1$. Soit $U$ une v.a de loi Uniforme sur $[0,1]$, on pose $\forall u \in ]0,1[$, $F^{(-1)}(u) = \inf\{x \in \mathbb{R}, F(x) \geq u\}$ alors $F(U)$ a pour f.d.r $F$.

prop 12 : $X$ une v.a.r a pour densité $f$ SSI $\forall a \in \mathbb{R}$ $\mathbb{P}(X \leq a) = \int_{-\infty}^{a} f(x)\, d\lambda(x)$.

Ex 13 : la densité d'une loi $\mathcal{E}(\lambda)$ est $f(x) = \lambda e^{-\lambda x} \mathbb{1}_{x>0}$

Thm 14 : Soient $(\Omega, F, \mu)$ et $(\Omega', F', \mu')$ deux espaces mesurés. On suppose que la loi $\nu$ sur $(\Omega \times \Omega', \mu \otimes \mu')$ admet une densité $h$ par rapport à $\mu \otimes \mu'$. Alors $\nu_\pi$ loi image de $\nu$ par $\pi : \Omega \times \Omega' \to \Omega$, $(x,y) \mapsto x$ admet comme densité $/\mu$ $f : x \mapsto \int_{\Omega'} h(x,x')\, d\mu'(x)$.

Thm 15 : soient $X$ v.a de $\mathbb{R}^n$, $Y$ dans $\mathbb{R}^p$, définis sur $(\Omega, F, \mathbb{P})$. On suppose que $X$ admet $f$ pour densité et $Y$ admet $g$ pour densité et $X \perp\!\!\!\perp Y$ alors $(X,Y)$ admet pour densité $h(x,y) = f(x)g(y)$

réciproquement, si $(X,Y)$ admet pour densité $h(x,y) = f(x)g(y)$, $g, f \geq 0$, alors $X \perp\!\!\!\perp Y$ et $X$ a pour densité $x \mapsto \frac{f(x)}{\int_{\mathbb{R}^n} f}$ et $Y : y \mapsto \frac{g(y)}{\int_{\mathbb{R}^p} g}$.

Ex 16 : $(X,Y)$ admet pour densité $f(x,y) = \begin{cases} e^{-(x+y)} & \text{si } x,y \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ alors $X \perp\!\!\!\perp Y$ et $X \sim \mathcal{E}(1)$ $Y \sim \mathcal{E}(1)$.

si $f(x,y) = \begin{cases} 2e^{(-x+y)} & \text{si } 0 \leq y \leq x \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ alors $X$ et $Y$ ne sont pas indep.

A p345

## IV. Moments d'une variables aléatoires

[B] p53

Def 17 : • si $X$ est une v.a.r intégrable, on note $\mathbb{E}[X] = \int_\Omega X\, d\mathbb{P}$, si $X \in \mathbb{L}^p$ $p>0$, on définit le moment d'ordre $p$ de $X$ par $\mathbb{E}[X^p] = \int X^p\, d\mathbb{P}$

• si $X$ est un vecteur aléatoire de $\mathbb{R}^d$, on note $X = (X_1 \ldots X_d)$ et $\mathbb{E}[X] = (\mathbb{E}[X_1], \ldots, \mathbb{E}[X_d])$

Thm 18 (Transfert) $X$ v.a, $\phi$ mes tq $\phi(X) \in \mathbb{L}^1$ on a $\mathbb{E}[\phi(X)] = \int_\Omega \phi \circ X(\omega)\, d\mathbb{P}(\omega) = \int_{\mathbb{R}^d} \phi(x)\, d\mathbb{P}_X(x)$

Rq 19 : • $\mathbb{E}[X] = \int_{\mathbb{R}} x\, d\mathbb{P}_X(x)$ si $X$ v.a.r

• la loi de $X$ est caractérisée par les $\mathbb{E}[\phi(X)]$ où $\phi$ est mes bornée, ce qui permet de calculer la loi de $X$

p57

prop 20 : si $X$ v.a.r $\geq 0$, $p>0$, alors $\mathbb{E}[X^p] = p\int_0^\infty t^{p-1}\, \mathbb{P}(X>t)\, dt = p\int_0^\infty t^p (1-F(t))\, dt$.

def 21 : si $X$ et $Y$ admettent un moment d'ordre 2, on note $\mathrm{cov}(X,Y) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}(X))(Y - \mathbb{E}(Y))]$. et si $X$ est un v.a dans $\mathbb{R}^d$, on note $\mathrm{cov}(X) = (\mathrm{Cov}(X_i, X_j))_{i,j}$ sa matrice de covariance.

p79

Thm 22 : $X$ et $Y$ sont indep SSI $\forall f, g$ mesurable tq $f(X)g(Y)$ intégrable, on a $\mathbb{E}[f(X)g(Y)] = \mathbb{E}[f(X)]\mathbb{E}[g(Y)]$

A p334

prop 23 : soit $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$, $b \in \mathbb{R}^m$, la v.a $Z = AX+b$ a pour cov : $\mathrm{cov}(Z) = A\, \mathrm{cov}(X)\, {}^tA$.

Ex 24 : si $X \sim \mathcal{N}(m, \Sigma)$, alors $\Sigma = {}^tQQ$ et $X \overset{\text{loi}}{=} QY + m$ où $Y \sim \mathcal{N}(0, I_d)$

## V. Fonction Génératrices et caractéristiques

### 1) v.a discrète à valeurs dans $\mathbb{N}$

Def 25 : $G(t) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n t^n = \mathbb{E}[t^X]$

Thm 26 : continue, convexe, $\mathcal{C}^\infty(]-1,1[)$, caractérise la loi, récupération des moments

prop 27 : $G_{X+Y} = G_X G_Y$ si $X \perp\!\!\!\perp Y$ + appli

Lemme 28 : $S = \sum_{k=0}^{N} X_k$ $\quad G_S = G_N \circ G_X$

app 29 : Galton Watson

### 2) Fonction caracté

Def 30 : $E[e^{i\langle t, X\rangle}]$

Thm 31 : caractérise la loi

Ex 32 : si $X \sim \mathcal{N}(0,\sigma^2)$, $\varphi_X(t) = e^{-\frac{\sigma^2 x^2}{2}}$, $Y = \Sigma X + m$

prop 33 : régularité et moments / $\varphi_{X+Y} = \varphi_X \varphi_Y$

Thm 34 : (moments)

app 35 : cos d'une gaussienne

classification des fonction caracté. Brancovan (Proba) p 153

## VI. Théorèmes limites

Def 36 (convergence en loi)

Thm 37 : conv des f.d.r, Paul Levy.

Thm 38 : TCL

app 39 : Stirling

p 159 p 182 et 197 p 161-2 Ap 160

p62 Bp61

p64

p 130 p 197

récap des lois (Appel au début)

<u>Références :</u>

A : Appel (Proba pour non probabilistes)
B : Barbe Ledoux (Proba)
G : Garet et Kurtzmann
voir aussi leçon 260 pour V et VI.