246 — Série de Fourier. Exemples et applications.

I. Définitions et premières propriétés

ELA p170-171

Def ①: On note $C_{2\pi} = \{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ 2π-périodique continue$\}$

$\forall p \in [1, +\infty]$: $\mathbb{L}^p_{2\pi} = \{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ 2π-périodique, mesurables tq $\|f\|_p = \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(x)|^p dx \right)^{1/p} < +\infty \}$

$\mathbb{L}^2_{2\pi}$ est muni du produit scalaire $\langle f, g \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f\bar{g}\, dx$ (c'est un Hilbert)

• $\forall n \in \mathbb{Z}$, on note $e_n : x \mapsto e^{inx} \in C_{2\pi}$.

p173

Def ②: Soient $f \in \mathbb{L}^1_{2\pi}$ et $n \in \mathbb{Z}$. On appelle n-ième coefficient de Fourier de f le nombre complexe

$$c_n(f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-inx} dx \left(= \langle f, e_n \rangle \text{ si } f \in \mathbb{L}^2_{2\pi} \right)$$

p177

• on appelle n-ième coefficients de Fourier réels de f les nombres $a_n(f) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos(nx)$; $b_n(f) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin(nx)$

Rq ③: f paire $\Rightarrow b_n(f) = 0$

f impaire $\Rightarrow a_n(f) = 0$

p174

Def ④: • si $f, g \in \mathbb{L}^1_{2\pi}$, $f * g(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t-x) g(t)\, dt$

• $f_\sigma : x \mapsto f(-x)$ et si $a \in \mathbb{R}$, $\tau_a f : x \mapsto f(x-a)$.

p174, 176

prop ⑤: * (i) $c_n(f_\sigma) = c_{-n}(f)$

(ii) $c_n(\bar{f}) = \overline{c_{-n}(f)}$

(iii) $c_n(\tau_a f) = e^{-ina} c_n(f)$

(iv) $c_n(e_k f) = c_{n-k}(f) e_n$

$(f \in \mathbb{L}^1_{2\pi}$ et $g \in \mathbb{L}^\infty_{2\pi})$ *

(v) $f * e_n = c_n(f) e_n$

(vi) $\|f * g\|_\infty \leq \|f\|_1 \|g\|_\infty$

(vii) $c_n(f * g) = c_n(f) c_n(g)$

(viii) si $f \in \mathcal{C}^1_{pm}$ et $f \in \mathcal{C}_{2\pi}$

$c_n(f') = in\, c_n(f)$.

p175

Thm ⑥: (Lemme de Rieman Lebesgue). Si $f \in \mathbb{L}^1_{2\pi}$ alors $\lim\limits_{|\lambda| \to +\infty} \int_0^{2\pi} f(x) e^{i\lambda x} dx = 0$.

en particulier, $\lim\limits_{|n| \to +\infty} c_n(f) = 0$.

II. Séries de Fourier et Noyaux trigonométriques

p178

Def ⑦: soit $f \in \mathbb{L}^1_{2\pi}$. On appelle série de Fourier de f la série trigonométrique $\sum_{-\infty}^{+\infty} c_n(f) e^{inx}$.

On note $S_N f : x \mapsto \sum_{n=-N}^{N} c_n(f) e_n(x)$ la somme partielle.

p178

Thm ⑧: Soient $f \in \mathbb{L}^1_{2\pi}$ et $(u_n)_n$ une suite de complexes tq $S_N = \sum_{n=-N}^{N} u_n e^{inx}$ converge vers f dans $\mathbb{L}^1_{2\pi}$, alors $\forall n \in \mathbb{Z}$, $u_n = c_n(f)$.

p184

Def ⑨: Le noyau de Dirichlet d'ordre N est la fonction $D_N = \sum_{n=-N}^{N} e_n$ $(N \in \mathbb{N})$.

prop ⑩: (i) $\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_n(x)\, dx = 1$

(ii) $\forall x \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$, $D_n(x) = \dfrac{\sin((N+\frac{1}{2})x)}{\sin(\frac{x}{2})}$

(iii) $\forall f \in \mathbb{L}^1_{2\pi}$, $S_N(f) = f * D_n$

p184 - 186

Def ⑪: le noyau de Fejér d'ordre N est la fonction

$$K_N = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} D_j$$

$\forall f \in \mathbb{L}^1_{2\pi}$, on appelle N-ème somme de Césaro la fonction

$$\sigma_N(f) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} S_k(f).$$

p 186 **prop 12**: (i) $K_N = \sum_{n=-N}^{N} \left(1 - \frac{|n|}{N}\right) e_n$

(ii) $\sigma_N(f) = f * K_N$ et $\sigma_N(x) = \frac{1}{N}\left(\frac{\sin(\frac{Nx}{2})}{\sin(\frac{x}{2})}\right)^2 \quad \forall x \notin 2\pi\mathbb{Z}$

(iii) $(K_N)_N$ est une approximation de l'unité dans $L^1_{2\pi}$

III. Résultats de convergence et premières applications

GOU p 392 **Thm 13**: (lemme de Baire) soit (E,d) un espace métrique complet alors toute intersection dénombrable d'ouverts denses dans E est dense de E.

GOU p 404 **Thm 14**: (Banach-Steinhaus): Soient E un Banach et F un evn. Soit $H \subset (\mathcal{L}_c(E,F), |||\cdot|||)$ alors ou bien $(|||f|||)_{f\in H}$ est borné, ou bien $\{x \in E,\ \sup_{f\in H} \|f(x)\| = +\infty\}$ est dense dans E.

GOU p 405 **application 15**: on considère $l_n : C_{2\pi} \to \mathbb{C}$, $f \mapsto \sum_{p=-n}^{n} c_p(f)$

alors $\lim_{n\to+\infty} |||l_n||| = +\infty$

en particulier, $\{f \in C_{2\pi},\ S_N(f)(0) \text{ diverge}\}$ est dense dans $C_{2\pi}$.

GOU p 265 **Ex 16**: soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ paire ~~et~~ 2π-périodique définie par $f(x) = \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{p^2} \sin\left[(2^{p^3}+1)\frac{x}{2}\right]$. Alors f est continue mais sa série de Fourier diverge en 0.

ELA p 196 **Thm 17**: (Thm de Fejér). (i) si $f \in C_{2\pi}$ alors :
$\|\sigma_N(f)\|_\infty \leq \|f\|_\infty$ et $\|\sigma_N(f) - f\|_\infty \xrightarrow[N\to+\infty]{} 0$

(ii) si $f \in L^p_{2\pi}$ $p \in [1, +\infty[$ alors $\|\sigma_N(f)\|_p \leq \|f\|_p$ et
$\|\sigma_N(f) - f\|_p \xrightarrow[N\to+\infty]{} 0$

application 18: $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est une base hilbertienne de $L^2_{2\pi}$ et $\|S_N f - f\|_2 \xrightarrow[N\to+\infty]{} 0$. De plus, on a la formule de Parseval : $\|f\|_2^2 = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n(f)|^2$. donc $\Phi : L^2_{2\pi} \to \ell^2(\mathbb{Z})$, $f \mapsto (c_n f)_{n\in\mathbb{Z}}$ isométrie. ZUI p 83

application 19: soit $f \in C_{2\pi}$, $x_0 \in \mathbb{R}$. si $S_N(f)(x_0) \xrightarrow[N\to+\infty]{} l$ alors $l = f(x_0)$. ZUI p 83

application 20: soit $f \in C_{2\pi}$, f C^1 par morceaux, alors la série de Fourier de f converge normalement vers f.

Thm 21: si $f \in C^p_{2\pi}$ $(p \in \mathbb{N}^*)$ alors $c_n(f) = o_{+\infty}\left(\frac{1}{n^p}\right)$ ELA p 201
et $\|S_n(f) - f\|_\infty = o\left(\frac{1}{n^{p-1}}\right)$.

soit $f \in L^1_{2\pi}$ et $p \geq 2$. si $c_n(f) = O\left(\frac{1}{n^p}\right)$ alors $f \in C^{p-2}_{2\pi}$.

Thm 22 (Dirichlet): Soit $f \in L^1_{2\pi}$ et $x_0 \in \mathbb{R}$ tq :
$\lim_{x\to x_0^-} f(x)$ et $\lim_{x\to x_0^+} f(x)$ existent et
$\lim_{x\to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0^-)}{x - x_0^-}$ et $\lim_{x\to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0^+)}{x - x_0^+}$ aussi, alors p 196
$S_N f(x_0) \xrightarrow[N\to+\infty]{} \frac{f(x_0^-) + f(x_0^+)}{2}$.

Thm 23: (Bernstein) soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ 2π-périodique et α höldérienne $(\alpha \in]\frac{1}{2}, 1])$ alors sa série de Fourier converge normalement vers f. p 200

IV. Exemples et applications des théorèmes de convergence

p195

Thm 24 : l'application $\mathbb{L}^1_{2\pi} \longrightarrow \ell^0(\mathbb{Z})$ est injective.
$f \longmapsto (c_n(f))_{n\in\mathbb{Z}}$

Thm 25 : (Weierstrass) Toute fonction continue sur $[a,b]$ est limite uniforme sur $[a,b]$ d'une suite de polynômes

p192

Exemple de calculs 26 :

- $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ • $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$

(considérer $f : [-\pi,\pi] \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto 1 - \frac{x^2}{\pi^2}$, 2π périodisée.)

GOU p272

Thm 27 : (Formule sommatoire de Poisson) soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ de classe $\mathcal{C}^1$ tq $f(x) = O\left(\frac{1}{x^2}\right)$ et $f'(x) = O\left(\frac{1}{x^2}\right)$ quand $|x| \to +\infty$.

On a : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(x+n) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f^*(n) e^{2i\pi n x}$

où $\forall n \in \mathbb{Z}$, $f^*(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-int}\, dt$.

GOU p272

application 28 : $\forall s > 0$ $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-\pi n^2 s} = \frac{1}{\sqrt{s}} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\pi k^2}{s}}$

en particulier si $\Theta(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x^{n^2}$ (fonction theta de Jacobi)

alors $\sqrt{s}\, \Theta(e^{-s\pi}) = \Theta(e^{-\frac{\pi}{s}})$

FGN p49

Thm 29 : (équation de la chaleur sur un anneau)

soit $u_0 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction non nulle, continue, $\mathcal{C}^1$ p.m et 2π périodique.

l'équation $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, $u(0,x) = u_0(x)$

où u 2π-périodique par rapport à x $\forall t \geq 0$, continue sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ et $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ admet une unique solution.

<u>Références:</u>

[ELA] : El-Amrani (Analyse de Fourier ...) (90%)

[FGN] : Francinou (Analyse 4) (équation chaleur)

[GOU] : Gourdon (Analyse)

[ZUI] : Zuily-Queffelec 2ème édition.