241 Suites et séries de fonctions. Exemples et Contre Exemples.

Dans cette leçon, f et f_n désignent des fonctions d'un ensemble X dans un e.v.n $(E, \|.\|)$.

I. Suites de fonctions : Modes de convergence

A. Convergence simple et uniforme

ELA p 139

Def ①: $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers f si : $\forall x \in X$, $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $f(x)$, ie : $\forall x \in X, \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N \Rightarrow \|f_n(x) - f(x)\| \leq \varepsilon$ (on notera f_n C.S vers f).

ELA p 140

Def ②: On dit que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f (C.U) sur X si : $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N \Rightarrow (\forall x \in X, \|f_n(x) - f(x)\| \leq \varepsilon)$

Rq ③: C.U $\boxed{\Rightarrow}$ C.S mais la réciproque est fausse

ELA p 142

Contre-Ex ④: • $X = [0,1]$ et $f_n(x) = x^n$. $(f_n)_n$ C.S vers $f : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [0,1[\\ 1 & \text{si } x = 1 \end{cases}$ mais pas uniformément.

• la suite de fonctions définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$f_n(x) = \frac{\sin(nx)}{1 + n^2x^2}$$
C.S vers 0 mais pas unif.

B. Convergence uniforme et continuité

ELA p 145

$\forall f : X \to E$ bornée, on note $\|f\|_\infty = \sup_{x\in X} \|f(x)\|$

$\|.\|_\infty$ est une norme appelée norme de la convergence unif.

TRm ⑤: si f_n est continue sur $X \subset F$ (ev de dim finie) et si $(f_n)_n$ C.U vers f, alors f est continue.

ELA p 146

Ex ⑥: La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ donnée sur $\mathbb{R}$ par $f_n(x) = e^{-nx}$ ~~ne~~ converge pas uniformément sur $\mathbb{R}_+$

ELA p 156

TRm ⑦: soit $f : [0,1] \to \mathbb{C}$ continue, on note $B_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} f\left(\frac{k}{n}\right) \quad \forall n \in \mathbb{N}$ alors : $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ C.U vers f (TRm de Weierstrass)

FRA p 156

TRm ⑧: (Dini) Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions continues de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$, qui converge simplement vers f cont
(i) on suppose que $(f_n)_n$ est croissante, alors $(f_n)_n$ C.U vers f
(ii) on suppose que f_n est croissante $\forall n \in \mathbb{N}$ alors $(f_n)_n$ C.U

application ⑨: on considère la suite de polynômes : $P_0 = 0 \quad P_{n+1}(x) = P_n(x) + \frac{1}{2}(x - P_n^2(x))$, alors $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ C.U vers $x \mapsto \sqrt{x}$ sur $[0,1]$.

ELA p 148

Rq ⑩: si $f_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}$, alors (f_n) C.U vers $x \xrightarrow{f} |x|$ et $f_n \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$. Mais f non dérivable sur $\mathbb{R}$.

ELA p 150

TRm ⑪: soit (f_n) une suite de $\mathcal{C}^1([a,b], E)$ où E Banach, telle que
(i) $\exists x_0 \in [a,b]$ tq $(f_n(x_0))_n$ converge
(ii) (f_n') C.U vers g sur $[a,b]$.
Alors (f_n) C.U vers f de classe $\mathcal{C}^1$ et $f' = g$.

II. Séries de fonctions

ici, on suppose E complet

ELA p 189

Def ⑫: • Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonction. On appelle série des fonctions f_n notée $\sum f_n$ la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ où $S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f_k(x)$ (somme partielle)

• la série $\sum f_n$ converge (respe C.U) si la suite $(S_n)_n$ C.S (repec C.U). La limite est alors appelée somme de la série $\sum f_n$.

ELA p 191

Ex ⑬: $f_n(x) = x e^{-nx}$ sur $\mathbb{R}_+$: $\sum f_n$ converge S mais pas unif.

prop ⑭: $\sum f_n$ C.U $\Leftrightarrow (R_n)_n$ C.U où $R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(x)$

Def 15 : $\sum f_n$ converge absolument (C.A) (resp converge normalement C.N) si $\sum \|f(x)\|$ converge (resp f_n bornée $\forall n$ et $\sum \|f_n\|_\infty$ converge).

HAU p 253

Thm 16 : $\left.\begin{array}{l} C.N \Rightarrow C.A \\ C.N \Rightarrow C.U \end{array}\right\} \Rightarrow C.S$ dans un espace E complet

Ex 17 : • $f_n(x) = \frac{(-1)^{n+1} x^n}{n}$ $\forall x \in [0,1]$, $n \in \mathbb{N}^*$. (f_n) C.U sur $[0,1]$ mais pas C.A

ELA p 193

• $f_n(x) = \frac{1}{x} \mathbb{1}_{[n,n+1[}(x)$ $\forall x \in [0,+\infty[$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$. (f_n) C.U sur $[1,+\infty[$ et f_n C.A mais on a pas de C.N.

prop 18 : $\sum f_n$ C.N $\Leftrightarrow$ $\exists (\alpha_n)$ suite de réelle tq $\|f_n(x)\| \leq \alpha_n$ $\forall x \in X$ et $\sum \alpha_n$ converge

ELA p 198

Thm 19 : (i) si (f_n) dérivables sur I à valeur dans E. Si $\exists a \in I$ tq $\sum f_n(a)$ conv et que $\sum f_n'$ C.U sur I alors : $\sum f_n$ C.U sur tout segment de I et $\left(\sum_{n\geq 0} f_n\right)' = \sum_{n\geq 0} f_n'$.

(ii) $(f_n)_n$ suite intégrables sur $[a,b]$ tq $\sum f_n$ C.U alors $\sum_{n\geq 0} f_n$ est intégrable sur $[a,b]$ et $\int_a^b \sum_{n\geq 0} f_n = \sum_{n\geq 0} \int_a^b f_n$.

III. Séries Entières.

A. Rayon de convergence

Def 20 : $\sum f_n$ est une série entière si $f_n : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto a_n z^n$ où $(a_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$.

ELA p 230

Def-prop 21 : il existe un unique R tq :

(i) si $|z| > R$ $\sum a_n z^n$ diverge

(ii) si $|z| < R$ $\sum a_n z^n$ converge absolument.

R est appelé rayon de converge de la série entière $\sum f_n$.

Rq 22 : si $|z| = R$, on ne peut rien dire comme le montre les ex : $\sum z^n$; $\sum \frac{z^n}{n^2}$; $\sum \frac{z^n}{n}$

ELA p 253

prop 23 : • (Règle de D'Alembert) on considère $\sum a_n z^n$ de rayon de conv R. Si $\left(\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|\right)_n$ conv vers L, alors $R = \frac{1}{L}$

• (Formule de Hadamard) $R = \frac{1}{\limsup_{n\to+\infty} |a_n|^{\frac{1}{n}}}$.

p 237

prop 24 : si $\sum a_n z^n$ a pour rayon de convergence R, alors $\sum (n+1) a_{n+1} z^n$ a le même rayon de convergence.

p 238

Thm 25 : Une série entière $\sum a_n z^n$ converge normalement sur tout compact du disque de convergence.

Cor 26 : On peut intégrer ou dériver terme à terme une série entière sur son disque de convergence.

B. Fonctions développable en série entière

ELA p 241

Def 27 : soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$. f est développable en série entière en x_0 si il existe une série $\sum a_n x^n$ de rayon de convergence $R > 0$ et $r \in]0,R]$, $\forall x \in]x_0 - r ; x_0 + r[$ $f(x) = \sum_{n\geq 0} a_n (x - x_0)^n$

prop 28 : si f est développable en série entière en x_0, son développement est unique.

ELA p 245

Rq 29 : f est développable en série entière $\Rightarrow$ f est $\mathcal{C}^\infty$.

La réciproque est fausse : $f(x) = \begin{cases} \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$.

Ex 30 : • (série géométrique) : $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$ $\forall |x| < 1$

• $\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n$ $\forall x \in]-1,1[$

• $\arctan(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}$ $\forall x \in]-1,1[$

GOU p 252

Thm 31 : (Thm d'Abel) : soit $\sum a_n z^n$ une série de rayon de conv ≥ 1 tq $\sum a_n$ converge. On note f la somme de la série sur le disque unité. Soit $\theta_0 \in [0, \frac{\pi}{2}[$, on pose :

$\Delta_{\theta_0} = \{z \in \mathbb{C},\ |z| < 1 \text{ et } z = 1 - \rho e^{i\theta} \text{ où } \rho > 0,\ \theta \in]-\theta_0, \theta_0[\}$ $\lim_{\substack{z \to 1 \\ z \in \Delta_{\theta_0}}} f(z) = \sum_{n\geq 0} a_n$

Gou p 253

applications ㉜ : (i) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}$

(ii) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \log(2)$

(iii) si $\sum a_n$ converge et $\sum b_n$ converge et $\sum c_n$ converge où $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$

alors $\sum_{n\geq 0} a_n \sum_{n\geq 0} b_n = \sum_{n\geq 0} c_n$

III. Série de Fourier

ZUi p 6P-69

Def ㉝ : on note $\mathcal{C}^0_{2\pi} = \{ f$ continue 2π périodique $\}$ et

$\mathbb{L}^p_{2\pi} = \{ f$ 2π-périodiques mes, $\|f\|_p < +\infty \}$ $p \in [1, +\infty]$

si $f \in \mathbb{L}^1_{2\pi}$, on note $c_n(f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-int} dt \quad \forall n \in \mathbb{Z}$

$= \langle f, e_n \rangle \qquad e_n : t \mapsto e^{int}$.

et $S_N(f) = \sum_{n=-N}^{N} c_n(f) e_n$ (somme partielle de Fourier)

$\sigma_N(f) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} S_n(f)$ (somme partielle de Féjer).

ZUi p 73

Thm ㉞ : Il existe $f \in \mathcal{C}^0_{2\pi}$ telle que $\sup_{N\geq 1} |S_N(f, 0)| = +\infty$

donc $S_N(f)$ diverge en 0.

Thm ㉟ : (i) si $f \in \mathcal{C}^0_{2\pi}$, alors $\|\sigma_N(f) - f\|_\infty \xrightarrow[N\to+\infty]{} 0$

(ii) si $f \in \mathbb{L}^p_{2\pi}$ $(1 \leq p < +\infty)$ alors $\|\sigma_N(f) - f\|_p \xrightarrow[N\to+\infty]{} 0$

applications ㊱ : • si $f \in \mathcal{C}^0_{2\pi}$ et $x_0 \in \mathbb{R}$ tq $S_N(f)(x_0) \xrightarrow[N\to+\infty]{} l$

alors $l = f(x_0)$.

ZUi p 83

• $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ forme une base hilbertienne de $\mathbb{L}^2_{2\pi}$, en particulier, la suite de fonction $(S_N(f))_N$ converge vers f dans $\mathbb{L}^2_{2\pi}$.

ELA p 315

Thm ㊲ : Soit $f \in \mathcal{C}^0_{2\pi}$, $\mathcal{C}^1$ par morceau, alors la série de Fourier de f converge normalement vers f sur $\mathbb{R}$

p 317

application ㊳ : $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$

ELA p 420

application ㊴ : soit $f \in S = \{ f \in \mathcal{C}^\infty, \forall m, n \in \mathbb{N}, x \mapsto x^n f^{(m)}(x)$ bornée $\}$

alors on a la formule sommatoire de Poisson :

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(n) = \sum_{p=-\infty}^{+\infty} \hat{f}(p)$$

Références : [ELA] : El Amrani (Suites et séries numériques ...) (90%)
[GOU] : Gourdon (Analyse)
[ZUI] : Zuily - Queffélec (édition 2) (pour III)