$(X, \mathcal{A}, \mu)$ désigne un espace mesurée. On suppose connu le théorème de convergence dominée. E est un espace métrique et $f : E \times X \to \mathbb{K}$, et $F(u) = \int_X f(u,x)\, d\mu(x)$

I. Étude de la régularité

1) Continuité

BR p121

Thm ① : soit $u_0 \in E$. On suppose que :
(i) $\forall u \in E$, $x \mapsto f(u,x)$ est μ-mesurable
(ii) μ-pp, $u \mapsto f(u,x)$ est continue en u_0
(iii) il existe $g \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}_+}(\mu)$ tq $\forall u \in E$, $|f(u,x)| \leq g(x)$ $\mu(dx)$-pp
alors $F : u \mapsto \int_X f(u,x)\, d\mu(x)$ est définie $\forall u \in E$, continue en u_0

app ② : λ = mes de Lebesgue sur $\mathbb{R}$, $f \in \mathcal{L}^1(\lambda)$ $a \in \overline{\mathbb{R}}$.
$u \mapsto \int_a^u f(x)\, d\lambda(x)$ est continue sur $\mathbb{R}$

Ex ③ : si $X = \mathbb{N}$, $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\mathbb{N})$, m mesure de comptage, on retrouve le résultat sur la continuité des séries de fonctions si f_n continue sur E $\forall n \geq 1$, et $\sum f_n$ converge normalement, alors $\sum_{n\geq 1} f_n$ est continue sur E.

H p224

C-Ex ④ : $x \mapsto F(x) = \int_0^{+\infty} x e^{-xt}\, dt$ est bien définie sur $\mathbb{R}_+$ mais pas continue en 0.

2) Dérivabilité

BR p122

Thm ⑤ : $E = I$ intervalle de $\mathbb{R}$ ouvert $\neq \emptyset$, $u_0 \in I$. On suppose que
(i) $\forall u \in I$, $f(\cdot, u) \in \mathcal{L}^1(\mu)$
(ii) $\mu(dx)$-pp, $\frac{\partial f}{\partial u}(u_0, x)$ existe
(iii) $\exists\, g \in \mathcal{L}^1(\mu)$ telle que $\forall u \in I$, $\mu(dx)$-pp, $|f(u,x) - f(u_0,x)| \leq g(x)\, |u - u_0|$
alors $F(u) = \int_X f(u,x)\, dx$ est définie sur I, dérivable en u_0 et $F'(u_0) = \int_X \frac{\partial f}{\partial u}(u_0, x)\, d\mu(x)$.

Rq ⑥ : On peut généraliser ce résultat aux fonctions $\mathcal{C}^k$ $k \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$

BO p80

Ex ⑦ : on pose $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$ $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1}\, dt$. C'est une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ tq $\Gamma^{(k)}(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} \log(t)^k t^{x-1}\, dt$

app ⑧ : $\Gamma(x) \underset{x \to +\infty}{\sim} \sqrt{2\pi x}\left(\frac{x}{e}\right)^x$ (Stirling)

H p226

C-Ex ⑨ : $f : \mathbb{R} \times [0, +\infty[\to \mathbb{R}$, $(x, t) \mapsto x^2 e^{-t|x|}$ est $\mathcal{C}^\infty$ en x mais
$F(x) = \int_0^{+\infty} f(x,t)\, dt$ n'est pas de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

app ⑩ : $\forall x \geq 0$, $I(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(xt)}{t} e^{-t}\, dt = \arctan(x)$.

G p265

Ex ⑪ : (Formule sommatoire de Poisson) : soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ $\mathcal{C}^1$ tq $f(x) = O\left(\frac{1}{x^2}\right)$ et $f'(x) = O\left(\frac{1}{x^2}\right)$ quand $|x| \to +\infty$.
alors $\forall x \in \mathbb{R}$ $\sum_{n \in \mathbb{N}} f(x+n) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f^*(n) e^{2i\pi n x}$ où $\forall n \in \mathbb{Z}$
$f^*(n) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-2i\pi n t}\, dt$.

3) Holomorphie

BO p46

Thm ⑫ : si $E = \Omega$ ouvert de $\mathbb{C}$, $f : \Omega \times X \to \mathbb{C}$ tq
(i) $\forall x \in X$, $f(\cdot, x)$ est holomorphe
(ii) $\forall z_0 \in \Omega$ $f(z_0, \cdot)$ est mesurable
(iii) $\exists\, V$ voisinage de z_0 dans Ω et $\rho \in \mathcal{L}^1(\mu)$ tq $\forall z \in V$, $\forall x \in X$, $|f(z,x)| \leq \rho(x)$
alors $F : z \in \Omega \mapsto \int_X f(z,x)\, d\mu(x)$ est holomorphe et $F^{(k)}(z) = \int_X \frac{\partial^k f(z,x)}{\partial z^k}\, d\mu(x)$.

Ex 13 : $\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{z-1}\,dt$ est une fonction holomorphe sur le demi-plan $\{z \in \mathbb{C}, \mathrm{Re}(z) > 0\}$ et $\Gamma^{(k)}(z) = \int_0^{+\infty} e^{-t} \log(t)^k t^{z-1}\,dt$.

* prolongement

Lemme 14 : on a $\forall\, 0 < a < 1$, $\int \frac{e^{az}}{e^z + 1} = \frac{\pi}{\sin \pi a}$

Lemme 15 : $\forall\, 0 < a, b < 1$, $\Gamma(a)\Gamma(b) = \Gamma(a+b)\,\beta(a,b)$ où $\beta(a,b) = \int_0^1 t^{a-1}(1-t)^{b-1}\,dt$.

Q p234

Thm 16 : $\forall\, z \in \mathbb{Z}$ $\Gamma(p)\Gamma(1-p) = \frac{\pi}{\sin \pi p}$

en particulier, Γ se prolonge sur $\mathbb{C} \setminus \{n, n \in \mathbb{N}\}$.

II. Convolution

p235

Def 17 : Soient f, g mes positives, on définit $\forall x \in \mathbb{R}^d$
$f * g(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x-y) g(y)\, d\lambda(y)$.

Thm 18 : si $f \in \mathbb{L}^p(\lambda_d)$, $g \in \mathbb{L}^q(\lambda_d)$ $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.
$f*g(x)$ est bien définie $\forall x \in \mathbb{R}^d$ et $f*g$ est uniformément continue

p241

app 19 : si A est un borélien de $\mathbb{R}^d$ tq $\lambda_d(A) > 0$, alors
$A - A := \{a - a', a, a' \in A\}$ est un voisinage de 0 dans $\mathbb{R}^d$.

p242

Thm 20 : soient φ de classe $\mathcal{C}^n(\mathbb{R}^d)$ $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ et $f \in \mathbb{L}^1(\lambda_d)$
alors $f * \varphi \in \mathcal{C}^n(\mathbb{R}^d)$ et $\forall\, p \le n$,

$$D^p(f * \varphi) = f * D^p(\varphi) \quad \text{où} \quad D^p(f) = \sum_{\substack{\alpha = \alpha_1 \dots \alpha_d \\ \alpha_1 + \dots \alpha_d \le p}} \frac{\partial^{\alpha_1 + \dots + \alpha_p}}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots x_d^{\alpha_d}} f$$

on admet la continuité de translation et densité de $\mathcal{C}^0_K(\mathbb{R}^d)$ dans $\mathbb{L}^p$

Def 21 : $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ suite de $\mathbb{L}^1_K(\lambda_d)$ est une approximation de l'unité si :
(i) $\int \alpha_n d\lambda_d = 1$ et $\alpha_n \ge 0\ \forall n$
(ii) $\forall\, \varepsilon > 0$, $\lim_n \int_{|x| \ge \varepsilon} |\alpha_n|\, d\lambda_d = 0$

Ex 22 : • si $\alpha \in \mathbb{L}^1(\lambda_d)$ et $\int \alpha\, d\lambda_d = 1$ $\alpha \ge 0$, alors $\alpha_n(x) = n^d \alpha(nx)$ est une approximation de l'unité.

• $\varphi : x \mapsto \begin{cases} \exp\left(-\frac{1}{1 - \|x\|^2}\right) & \text{si } \|x\| < 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \in \mathcal{C}^\infty_K(\mathbb{R}^d)$

si $\alpha = \frac{\varphi}{\int_{\mathbb{R}^d} \varphi\, d\lambda_d}$ et $\alpha_n(x) = n^d \alpha(nx)$, alors
$\alpha_n \in \mathcal{C}^\infty_K(\mathbb{R}^d)\ \forall n$ est une suite régularisante (approximation de l'unité $+\ \mathcal{C}^\infty_K(\mathbb{R}^d)$.)

Thm 23 : si : $(\alpha_n)_n$ est une approximation de l'unité et $p \in [1, +\infty[$, $f \in \mathbb{L}^p(\lambda_d)$ alors $f * \alpha_n \in \mathbb{L}^p(\lambda_d)$ et $f * \alpha_n \xrightarrow{\|.\|_p} f$.

Cor 24 : $\mathcal{C}^\infty_K(\mathbb{R}^d)$ est dense dans $\mathbb{L}^p(\mathbb{R}^d)$ $\forall\, p \in [1, +\infty[$

III. transformée de Fourier

III p105

Def 25 : $\forall f \in \mathbb{L}^1(\mathbb{R}^d)$ on pose $\hat{f} : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$, $\xi \mapsto \int_{\mathbb{R}^d} f(x) e^{-i\langle x, \xi\rangle} dx$
appelé transformée de Fourier de f.

prop 26 : (i) $\forall f \in \mathbb{L}^1(\mathbb{R}^d)$ $\hat{f}$ est continue et $\|\hat{f}\|_\infty \le \|f\|_1$.
(ii) $\lim_{\|\xi\| \to +\infty} \hat{f}(\xi) = 0$

prop (27) : (i) pour $f, g \in \mathbb{L}^1(\mathbb{R}^d)$ $\widehat{f*g} = \hat{f}\hat{g}$

(ii) si $f \in \mathbb{L}^1 \cap \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^d)$ et $j \in [1, d]$, $\widehat{\frac{\partial f}{\partial x_j}}(\xi) = i\xi \hat{f}(\xi)$

(iii) si $f \in \mathbb{L}^1(\mathbb{R}^d)$ et $x \mapsto x_j f(x) \in \mathbb{L}^1(\mathbb{R}^d)$, alors $\hat{f}$ admet une dérivée continue et bornée sur $\mathbb{R}^d$ et
$\forall \xi \in \mathbb{R}^d$. $\frac{\partial}{\partial x_j}(\hat{f})(\xi) = -i \widehat{x_j f}(\xi)$.

(les formules se généralisent en fonction de la régularité de f)

p 115

* Thm (28) : $\mathcal{F} : \mathbb{L}^1(\mathbb{R}^d) \longmapsto \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^d)$ est injective
$f \longmapsto \hat{f}$

app (29) : On appelle fonction poids : $p : I \to \mathbb{R}$ $p > 0$, mesurable tq $\forall n \in \mathbb{N}$ $\int_I |x|^n p(x)dx < +\infty$.

on note $\mathbb{L}^2(I, p) = \{ f, \text{ mes } \int_I |f(x)|^2 p(x)dx < +\infty \}$ muni du prod scalaire $\langle f, g \rangle = \int_I f(x)\overline{g}(x)p(x)dx$.

On appelle polynôme orthogonaux l'unique famille $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de pol unitaires orthogonaux 2 à 2, tq $\deg(P_n) = n$, obtenue par le procédé de Gram-Schmidt appliqué à $(X^n)_{n\in\mathbb{N}}$.

si I est non borné et si $\exists \alpha > 0$, $\int_I e^{\alpha|x|}p(x)dx < +\infty$ alors $\left(\frac{P_n}{\|P_n\|_p}\right)_n$ forme une base hilbertienne de $\mathbb{L}^2(I, p)$.

BMP p 140

Def (30) : soit $X : \Omega \to \mathbb{R}$ une variable aléatoire réelle, $\forall t \in \mathbb{R}$, on définit sa fonction caractéristique par
$\varphi_X(t) = E[e^{itX}] = \int_\Omega e^{itx} dP_X(x)$.

AP p 553

prop (31) : si X admet une densité f, alors $\varphi_X(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx}f(x)dx = \hat{f}(-t)$
donc φ_X caractérise la loi de X

Ex (32) * si $f : x \mapsto e^{-ax^2}$ $a > 0$, $\hat{f}(\xi) = \sqrt{\frac{\pi}{a}}\, e^{-\frac{\xi^2}{4a}}$

EL p 111

Références :

[BR] : Briane et Pagès (intégration)

[H] : Hauchecorne (contre ex en maths)

[BO] : Bost (poly)

[G] : Gourdon Analyse (11)

[Q] : Queffelec (Analyse complexe) (14 15 16)

[EL] : El Amrani (Analyse de Fourier)

[B] : Beck objectif agreg (29)

[AP] : Appel (Probabilités...) (30 31)

DVP : 1) formule des compléments (14 - 15 - 16)

2) Polynôme orthogonaux (29)

3) Equation de la chaleur