236 | Illustrer par des exemples quelques méthodes de calcul d'intégrales de fonctions d'une ou plusieurs variables

On supposera connu tous les théorèmes concernant le calcul intégrale (par ex Fubini, théorèmes de convergence ...)

## I. Premières techniques de calcul d'intégrales

### 1) Par primitives

[G] p 134

Ex ①: $\int_{\mathbb{R}} \frac{dt}{t^2+q^2} = \frac{\pi}{q}$

p 138

Ex ②: (décomposition en élément simple): $\int \frac{dx}{x^4-x^2-2}$

$= \frac{1}{6\sqrt{2}} \log\left(\left|\frac{x-\sqrt{2}}{x+\sqrt{2}}\right|\right) - \frac{1}{3}\arctan(x) + k \in \mathbb{R}$

• $\int \frac{dx}{x(x^2+1)^2} = \log(|x|) - \frac{1}{2}\log(x^2+1) + \frac{1}{2}\frac{1}{1+x^2} + k$.

### 2) Par IPP

p 126

Ex ③: $W_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n(x)\,dx$. On a : $W_n = \frac{n-1}{n} W_{n-2}$

et $W_n \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$

p 211

application ④ (Stirling) $n! \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$

p 159

Ex ⑤: on pose $\Gamma : x \in \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1}\,dt$, on a :

$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x) \quad \forall x > 0$.

### 3) Par changement de variable

Ex ⑥: • $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx = \frac{\pi}{4}$ $\quad (x = \sin(t))$

• $\int_{-2}^{2} \frac{\sin(t)}{2+\cos(t)}\,dt = 0$

• $\int_0^{\pi/2} \ln(\sin(t))\,dt = -\frac{\pi}{2}\ln(2)$

FGN 3 p 192

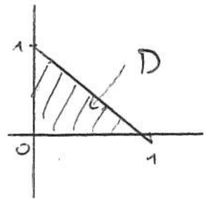
## II. Interversions

### 1) Fubini, TCD

[G] p 355

Ex ⑦: • $\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}$

• $\int_D xy\,dx\,dy = \frac{1}{24}$ où $D = \{x \geq 0,\ y \geq 0,\ x+y \leq 1\}$




p 350

Ex ⑧: (TCD) $\lim_{x \to +\infty} \int_{-\sqrt{x}}^{+\infty} \exp\left(-\sqrt{x}u + x\log\left(1+\frac{u}{\sqrt{x}}\right)\right)dx$

$= \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{u^2}{2}}\,du$

[B] p 81

application ⑨: $\Gamma(x) \underset{x \to +\infty}{\sim} \sqrt{2\pi x}\left(\frac{x}{e}\right)^x$

[Q] p 234

Ex ⑩: on pose $B(a,b) = \int_0^1 u^{a-1}(1-u)^{b-1}\,du$, on a

$\forall\, 0 < a, b < 1 \quad \Gamma(a)\Gamma(b) = \Gamma(a+b)B(a,b)$

→ volume $B(0,1)$ de $\mathbb{R}^n$ BRIANE p 222

### 2) série - intégrale

[C] p 35

Ex ⑪: • $\int_0^1 x^{-x} = \sum_{n=1}^{+\infty} n^{-n}$

• $\int_0^1 \frac{\ln(1-t)}{t}\,dt = -\frac{\pi^2}{6}$

Ex ⑩': $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}$ [C] p 212

### 3) Intégrale à paramètre

G p163 p165

**Ex 12** : $\mathbb{R}_+ \xrightarrow{\mathcal{I}} \mathbb{R}$, $x \mapsto \int_0^1 \frac{e^{-(t^2+1)x^2}}{t^2+1}\,dt$. On en déduit $\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$

**Ex 13** : $\forall x \geq 0 \quad \int_0^{+\infty} \frac{\sin(xt)}{t}\, e^{-t}\,dt = \arctan(x)$

## III. Analyse Complexe

[B] p24

**Thm 14** (Formule de Cauchy) Soit $f$ une fonction holomorphe sur un ouvert $\Omega$ de $\mathbb{C}$, $a \in \Omega$, $r > 0$ tq $\bar{D}(a,r) \subset \Omega$. $\forall z \in \mathring{D}(a,r)$, on a :

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{C(a,r)} \frac{f(w)}{w-z}\,dw$$

p25

**application 15** : $f$ holomorphe $\Rightarrow$ $f$ analytique.

**Ex 16** : par prolongement analytique :

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-i\xi x} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}\, e^{-\frac{\xi^2}{4}}$$

(transformée de Fourier d'une gaussienne)

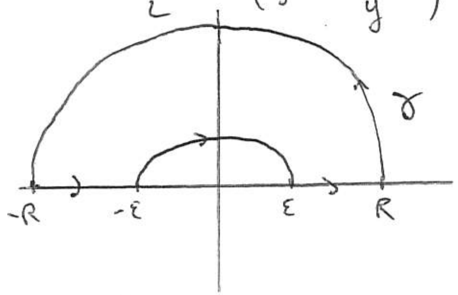
$\boxed{\text{Thm des résidus}}$

D p95

**Thm 17** soit $\Omega$ ouvert simplement connexe de $\mathbb{C}$, $F$ ens fini de points de $\Omega$, $f$ une fonction holo sur $\Omega \setminus F$, $\gamma$ lacet $\mathcal{C}^1$ p.m, à valeurs dans $\Omega \setminus F$, on a : $\int_\gamma f(z)\,dz = 2i\pi \sum_{a\in F} \mathrm{Res}(f,a)\, I(a$

Q p167

**application 18** : $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,dt = \frac{\pi}{2}$ $\quad \left(y \mapsto \frac{e^{iy}}{y}\right)$




p176 et 183

**application 19** : $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ax}}{1+e^x}\,dx = \frac{\pi}{\sin(\pi a)} \quad \forall\, 0<a<1$

p234

**application 20** : $\forall p \notin \mathbb{Z}.\ \Gamma(p)\Gamma(1-p) = \frac{\pi}{\sin \pi p}$


**Références** :

[B] : Bost (Poly)
[C] : Candelpergher (calcul intégral)
[FGN3] : Oraux X-ENS Analyse 3 (Francinou)
[G] : Gourdon Analyse
[Q] : Queffélec (Analyse complexe)


**DVP** :
- Formule des compléments [10, 19, 20]
- Stirling par Wallis [3, 4]