234 Fonctions et Espaces de Fonctions Lebesgue - intégrables

Dans cette leçon, $(X, \mathcal{A}, \mu)$ désigne un espace mesuré. $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On note λ la mesure de Lebesgue.

I. Intégrale de Lebesgue

BRI p 56

Def ① : une fonction $f : (X, \mathcal{A}) \to (\mathbb{K}, \mathcal{B}(\mathbb{K}))$ est étagée si $f = \sum_{i \in I} \alpha_i \mathbb{1}_{A_i}$ où I fini, $\alpha_i \in \mathbb{K}$ et $(A_i)_{i \in I}$ partition d'ensembles $\mathcal{A}$-mesurables de X. Parmi toutes les écritures possibles, on choisit la forme canonique qui est : $f = \sum_{\alpha \in f(X)} \alpha \mathbb{1}_{f = \alpha}$
on note $\mathcal{E}(\mathcal{A})$ l'ensemble des fonctions étagées

BRI p 98

Def ② : soit $f \in \mathcal{E}(\mathcal{A})$ positive. l'intégrale de f par rapport à μ est $\int_X f \, d\mu = \sum_{\alpha \in f(X)} \alpha \, \mu(\{f = \alpha\}) \in \overline{\mathbb{R}_+}$
(ceci ne dépend pas de l'écriture de f choisie).

BRI p 99

Ex ③ : $\mu(A) = \mathrm{card}(A)$, $X = \mathbb{N}$, $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\mathbb{N})$. on a :
$\int_{\mathbb{N}} f(n) \, d\mu(n) = \sum_{n \in \mathbb{N}} f(n)$.

BRI p 58

prop ④ : On note $\mathcal{M}_+(\mathcal{A}) = \{ f : (X, \mathcal{A}) \to (\overline{\mathbb{R}_+}, \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}_+})) \text{ mesurable} \}$
si $f \in \mathcal{M}_+(\mathcal{A})$, $\exists (f_n)_n$ une suite de $\mathcal{E}(\mathcal{A})$ telle que
$f_n(x) \xrightarrow[n \to +\infty]{} f(x)$ $\forall x \in X$ et $(f_n)_n$ est croissante.

BRI p 101

Def ⑤ : • si $f \in \mathcal{M}^+(\mathcal{A})$, on pose $\int_X f \, d\mu = \sup \{ \int_X \varphi \, d\mu, \varphi \leq f, \varphi \in \mathcal{E}(\mathcal{A}) \text{ positive} \}$
• f est μ-intégrable si $\int_X f \, d\mu < +\infty$.

p 101

Thm ⑥ : (Beppo Levi). Soit $(f_n)_{n \geq 1}$ une suite croissante de $\mathcal{M}^+(\mathcal{A})$. Alors si $f = \lim_n f_n \in \mathcal{M}^+(\mathcal{A})$ et $\int_X f \, d\mu = \lim_n \uparrow \int_X f_n \, d\mu$

p 103

application ⑦ : soit $f \in \mathcal{M}^+(\mathcal{A})$ alors :
$$\int_X f \, d\mu = 0 \iff \mu(f \neq 0) = 0 \quad \text{(on note alors } f = 0 \ \mu\text{-pp)}$$

II. Fonctions Lebesgue - intégrable

BRI p 105

Def ⑧ : (a) soit $f : (X, \mathcal{A}) \to (\mathbb{K}, \mathcal{B}(\mathbb{K}))$. elle est μ-intégrable si $|f|$ est μ-intégrable, ie $\int_X |f| \, d\mu < +\infty$
(b) on note $\mathcal{L}^1_{\mathbb{K}}(X, \mathcal{A}, \mu) = \{ f : X \to \mathbb{K}, \text{ mesurable}, \int_X |f| \, d\mu < +\infty \}$

p 105 - 106

Rq ⑨ : $\forall f : X \to \overline{\mathbb{R}}$, notant $f^+ = \max(0, f)$, $f^- = \max(0, -f)$. on a
$f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mu) \iff f^+$ et $f^- \in \mathcal{L}^1(\mu)$ et dans ce cas, f est finie μ-pp.
• si f est à valeur dans $\mathbb{C}$, $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{C}}(\mu) \iff \mathrm{Re}(f)$ et $\mathrm{Im}(f) \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mu)$

p 106

Def ⑩ : si $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mu)$, on pose $\int_X f \, d\mu = \int_X f^+ d\mu - \int_X f^- d\mu$
si $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{C}}(\mu)$, on pose $\int_X f \, d\mu = \int_X \mathrm{Re}(f) d\mu + i \int_X \mathrm{Im}(f) d\mu$

Ex ⑪ : si $X = \mathbb{N}$, $\mathcal{A} = \mathcal{P}(X)$, m = mesure de comptage, alors m-intégrabilité $\iff$ convergence absolue : $\ell^1_{\mathbb{K}}(m) = \mathcal{L}^1_{\mathbb{K}}(m)$.

p 107

prop ⑫. L'intégrale de Lebesgue est linéaire, positive, croissante et vérifie l'inégalité triangulaire

plus

Thm ⑬ : (Lemme de Fatou) : Soit $(f_n)_{n \geq 1}$ une suite de fonctions $\mathcal{A}$-mesurable positives, alors :
$$0 \leq \int_X \underline{\lim}_n f_n \, d\mu \leq \underline{\lim}_n \int_X f_n \, d\mu$$

Ex ⑭ : Soit f une fonction croissante sur $[0,1]$, continue en 0 et 1 et dérivable λ-pp dans $[0,1]$ alors :
$$\int_0^1 f'(x) \, dx \leq f(1) - f(0)$$

Thm 15 : (Convergence dominée) Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathcal{L}^1(\mu)$ telle que
(i) $f_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(x)$ pour μ-p.tout x
(ii) $\exists\, g \in \mathcal{L}^1(\mu)$ telle que $\forall n \geq 1$ $|f_n| \leq g$ μ-pp p116
alors $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$ et $\lim_n \int_X f_n \, d\mu = \int_X f \, d\mu$ et même $\lim_n \int_X |f_n - f| \, d\mu = 0$.

application 16 : soit f dérivable sur $[0,1]$ de dérivée f' bornée. Alors $\int_0^1 f'(x)\,dx = f(1) - f(0)$ p112

Ex 17 : $I_n(\alpha) = \int_0^n \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n e^{-\alpha x} dx$ converge SSI $\alpha > 1$ p118

Def 18. soit $f : I \to \mathbb{K}$ où I intervalle de $\mathbb{R}$. On dit que l'intégrale de f sur I est semi-convergente si f est μ-intégrable sur tout compact de I et si $\lim_{\substack{x \to \inf I \\ y \to \sup I}} \int_x^y f(t)\, d\mu(t) = \ell \in \mathbb{R}$.

prop 19 : • $f \in \mathcal{L}^1(I,\lambda) \Rightarrow$ l'intégrale de f est semi-convergente
la réciproque est fausse : $f :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$, $t \mapsto \frac{\sin(t)}{t}$ $\notin \mathcal{L}^1(\mathbb{R}_+^*, \lambda)$

IV. Espaces $\mathbb{L}^p(\mu)$, $1 \leq p < +\infty$

Def 20 : $\forall$ réel $1 \leq p < +\infty$ on définit
$\mathcal{L}^p_{\mathbb{K}}(\mu) = \{ f : X \to \mathbb{K}$ mesurable, $\int_X |f|^p d\mu < +\infty \}$ et p135
$\mathbb{L}^p(\mu) = \mathcal{L}^p(\mu)$ quotienté par la relation d'équivalence "égale μ-pp".
on note $\|f\|_p = \left(\int_X |f|^p d\mu\right)^{1/p}$

Rq 21 : • $\mathbb{L}^p_{\mathbb{K}}(\mu)$ est un $\mathbb{K}$-ev p136
• si $\mu(X) < +\infty$ alors $\forall$ $1 \leq p < q$, $\mathbb{L}^q_{\mathbb{K}}(\mu) \subset \mathbb{L}^p_{\mathbb{K}}(\mu)$.

Thm 22 : (Inégalité de Hölder) Soient $f, g : X \to \mathbb{K} \in \mathbb{L}^p(\mu)$ et $\mathbb{L}^q(\mu)$ p137
alors $fg \in \mathbb{L}^1(\mu)$ et $\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q$ où $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $p, q > 1$

Thm 23 : (Inégalité de Minkowski) $\forall p \in [1,+\infty[$, $\forall f, g$ dans $\mathbb{L}^p(\mu)$, $\|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$. En particulier, $(\mathbb{L}^p(\mu), \|.\|_p)$ est un evn p139

Thm 24 : (Riesz Fischer) $\forall$ $1 \leq p < +\infty$, $(\mathbb{L}^p(\mu), \|.\|_p)$ est complet et de toute suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergente dans $\mathbb{L}^p$ on peut extraire une sous suite qui converge μ-p.p p143

V. Densité, convolution et régularisation dans $\mathbb{L}^p_{\mathbb{K}}(\mu)$

prop 25 : $\forall p \in [1,+\infty[$, l'ensemble des fonctions étagées intégrables est dense dans $\mathbb{L}^p_{\mathbb{K}}(\mu)$. p147

Thm 26 : (i) L'ensemble des fonctions en escalier à support compact est dense dans $\mathbb{L}^p_{\mathbb{R}}(\lambda)$ $\forall 1 \leq p < +\infty$
(ii) L'ensemble $\mathcal{C}^0_c(\mathbb{R},\mathbb{K})$ des fonctions continues à support compact est dense dans $\mathbb{L}^p_{\mathbb{R}}(\lambda)$ $\forall 1 \leq p < +\infty$ p148

prop 27 : Soient $f \in \mathbb{L}^1(\mathbb{R}^n)$ et $g \in \mathbb{L}^p(\mathbb{R}^n)$ où $1 \leq p < +\infty$ alors si $(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y) g(y)\, dy$ on a : $f * g \in \mathbb{L}^p(\mathbb{R}^n)$ et $\|f\|_{L^1} \|g\|_p$ BRE p66

prop 28 : • Soit $f \in \mathcal{C}^0_c(\mathbb{R}^n)$ et $g \in \mathbb{L}^1(\mathbb{R}^n)$ alors $f * g \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^n)$
• si $f \in \mathcal{C}^k_c(\mathbb{R}^n)$ et $g \in \mathbb{L}^1(\mathbb{R}^n)$ alors $f * g \in \mathcal{C}^k(\mathbb{R}^n)$ $\forall k \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ p69

BECK p126

application (29) : (i) (continuité de la translation) : soit $1\leq p<+\infty$ on note $\tau_a(f) = f(\cdot - a)$, $\forall f \in \mathbb{L}^p([0,2\pi], \frac{\lambda}{2\pi})$ 2π-périodique $a \xrightarrow{\phi} \tau_a(f) \in \mathbb{L}^p([0,2\pi], \frac{\lambda}{2\pi})$ est uniformément continue

Thm (29)' : $\mathcal{C}^0_c(\mathbb{R})$ est dense dans $\mathbb{L}^p(\mathbb{R})$ $\forall$ $1\leq p<+\infty$

application : si $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ et $f\in\mathbb{L}^p$, $g\in\mathbb{L}^q$, $f*g$ est uniformément cont

BRi p 241

Def (30) : On appelle suite régularisante toute suite $(\rho_n)_n$ de fonctions tq : $\rho_n \in \mathcal{C}^\infty_c(\mathbb{R})$, $\operatorname{supp}\rho_n \subset B(0,\frac{1}{n})$ $\int \rho_n = 1$, $\rho_n \geq 0$ sur $\mathbb{R}$.

BRE p 70

- **Ex** : $\rho(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{|x|^2-1}} & \text{si } |x|<1 \\ 0 & \text{si } |x|\geq 1 \end{cases}$ et $\rho_n(x) = \left(\int\rho\right)^{-1} n\,\rho(nx)$

BRE p 71

Thm (31) : soit $f\in\mathbb{L}^p(\mathbb{R})$ avec $1\leq p<+\infty$, alors $\rho_n * f \xrightarrow{\|\cdot\|_p} f$

coro (32) : $\mathcal{C}^\infty_c(\mathbb{R})$ est dense dans $\mathbb{L}^p(\mathbb{R})$ pour $1\leq p<+\infty$, Ω ouvert de $\mathbb{R}^N$

BECK p 126

application (33) : (Lemme de Riemann Lebesgue) : soit $f\in\mathbb{L}^1([0,2\pi], \frac{\lambda}{2\pi})$ (2π-périodique) alors $\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)e^{-int}\,dt\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0 en $\pm\infty$.

VI. Cas Particulier de $\mathbb{L}^2(I,p)$

BECK p 110

Def (34) : Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. on appelle fonction poids une fonction $p : I \to \mathbb{R}$ mesurable strictement positive tq : $\forall n\in\mathbb{N}$ $\int_I |x|^n p(x)\,dx < +\infty$.

on munit alors $\mathbb{L}^2(I, p\,dx)$ d'un produit scalaire qui en fait un espace de Hilbert : $\langle f,g\rangle = \int_I f(x)\overline{g(x)}\,p(x)\,dx$.

BECK p 110

Def-prop (35) : Il existe une unique famille de polynômes unitaires orthogonaux 2 à 2 notée $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $\deg(P_n)=n$. On l'appelle la famille des polynômes orthogonaux associée à p.

BECK p 110

Thm (36) : soit p une fonction poids sur I non borné vérifiant qu'il existe $\alpha>0$ tq $\int_I e^{\alpha|x|}p(x)\,dx < +\infty$ alors les polynômes orthogonaux associés à p (renormalisés) forment une base hilbertienne de $\mathbb{L}^2(I,p)$

BECK p 110

Ex (37) : (Polynômes de Legendre) : $I = [-1,1]$ et $p(x)\equiv 1$

$P_0 = 1$, $P_1 = X$, $P_2 = X^2 - \frac{1}{3}$, $P_3 = X^3 - \frac{5}{3}X$.

(Polynômes de Hermite) : $I = \mathbb{R}$ et $p(x) = e^{-x^2}$

$P_0 = 1$, $P_1 = X$, $P_2 = X^2 - \frac{1}{2}$, $P_3 = X^3 - \frac{3}{2}X$..

voir Demailly p 73 pour application méthode de quadrature

Références :

[BRI] : Briane et Pagès (Théorie de l'intégration) (90%)
[BECK] : Beck (objectif Agrégation) (partie VI)
[BRE] : Brezis (Analyse fonctionnelle) (partie V)