228 Continuité et dérivabilité des fonctions réelles d'une variable réelle. Ex, app.

[R] p37

Dans cette leçon, I désigne un intervalle (a,b) $a<b\in\mathbb{R}$ et f désigne une fonction de I dans $\mathbb{R}$

I. Continuité et dérivabilité

1) Def et prop

Def ①: une fonction $f: I \to \mathbb{R}$ est continue en $\alpha \in I$ si: $\lim_{x\to\alpha} f(x) = f(\alpha)$. Elle est continue sur I si elle est continue en tout point de I. On note $\mathcal{C}^0(I)$ l'ensemble des fonctions continue sur I.

Ex ②: • une fonction constante est continue sur $\mathbb{R}$
• $\forall n \in \mathbb{N}$, $x \mapsto x^n$ est continue sur $\mathbb{R}$

prop ③: si $f: I \to \mathbb{R}$ est continue en α, elle est bornée au voisinage de α

Thm ④: (caracté séquentielle) $f: I\to\mathbb{R}$ est continue en α SSI $\forall (x_n)_n \in I^{\mathbb{N}}$ tq $x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \alpha$, on a $f(x_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(\alpha)$

Ex ⑤: • $f: x\in\mathbb{R} \mapsto \begin{cases} \cos\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x\neq 0 \\ 0 & \text{si } x=0 \end{cases}$ n'est pas continue en 0

• $f = \mathbb{1}_{\mathbb{Q}}$ est discontinue en tout point de $\mathbb{R}$.

Thm ⑥: si $\alpha \in \overline{I}\setminus I$ et $f: I\to\mathbb{R}$ ayant une limite l en α, il existe alors un unique prolongement de f à $I\cup\{\alpha\}$ noté $\tilde{f}$, qui est continu en α.

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x\in I \\ l & \text{si } x=\alpha \end{cases}$$

Ex ⑦: $f: x \mapsto \frac{\sin(x)}{x}$ sur $\mathbb{R}^*$ se prolonge par continuité en 0 avec $f(0)=1$

$f: x\mapsto \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ ne peut pas se prolonger en 0.

prop ⑧ (stabilité): si f, g deux fonctions définies sur I continues en α, alors $f+g$, fg, $\frac{f}{g}$, $\min(f,g)$, $\max(f,g)$ sont continues là où elle sont définies. La composée de 2 fonctions continues est encore continue.

2) Uniforme continuité et compacité

Def ⑨: $f: I\to\mathbb{R}$ est uniformément continue si: $\forall\varepsilon>0, \exists\eta>0, (x,y)\in I^2, |x-y|\leq\eta \Rightarrow |f(x)-f(y)|\leq\varepsilon$ p47

Ex ⑩: • $x\mapsto x^2$ n'est pas uniformément continue ($u_n=\sqrt{n+1}$, $v_n=\sqrt{n}$, $u_n-v_n\to 0$, $f(u_n)-f(v_n)=1\not\to 0$)
• $x\mapsto\sqrt{x}$ est unif cont sur $\mathbb{R}_+$

prop ⑪: pour $f: I\to\mathbb{R}$, on note $\omega_f(h) = \sup\{|f(u)-f(v)|, |u-v|\leq h, u,v\in I\}$ le module de continuité de f.
Alors f est uniformément continue SSI $\omega_f(h) \xrightarrow[h\to 0]{} 0$.

Thm ⑫: (Heine): si I est un compact de $\mathbb{R}$, et f continue sur I, alors f est uniformément continue sur I. p51

app ⑬: toute fonction périodique est UC p52

Thm ⑭: si $f: I\to\mathbb{R}$ et I compact, alors f est bornée sur I et atteint ses bornes. p49

on munit alors $\mathcal{C}^0([a,b])$ d'une norme: $\|f\|_\infty = \sup_{t\in[a,b]}|f(t)|$

Thm ⑮: soit $f: [0,1]\to\mathbb{C}$ continue. $B_n(x) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}f\left(\frac{k}{n}\right)$ ZQ p308
(i) $\|f-B_n\|_\infty \leq C\,\omega\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ $C\in\mathbb{R}_+^*$
(ii) $\exists f$ tq $\|f-B_n\|_\infty \geq \frac{\delta}{\sqrt{n}}$ $\delta\in\mathbb{R}_+^*$

3) dérivabilité, lien avec la continuité

R p72

Def 15 : f est dérivable en $a \in I$ si $\tau_a : x \mapsto \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ sur $I \setminus \{a\}$ admet une limite finie en a, noté $f'(a)$.
Elle est dérivable sur I si elle l'est en tout point de I.

Rq 16 : f dérivable en $a \Rightarrow f$ continue en a, mais la réciproque est fausse ($x \mapsto |x|$)

Def 17 : • f est dite $\mathcal{C}^1$ si f est dérivable et f' est continue
• f est dite de classe $\mathcal{C}^n$ si f est n-fois dérivable, de dérivée n-ième continue.
• f est $\mathcal{C}^\infty$ si elle est $\mathcal{C}^k$ $\forall k \in \mathbb{N}$.

Ex 18 : $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ mais pas $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$

prop 19 : Soient f, g deux fonctions de I dans $\mathbb{R}$, dérivables en $a \in I$. $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ $\lambda f + \mu g$ est dérivable en a et
(i) $(\lambda f + \mu g)'(a) = (\lambda f' + \mu g')(a)$
(ii) fg est dérivable en a et $(fg)'(a) = (f'g + g'f)(a)$
(iii) si $g(a) \neq 0$ alors $\frac{1}{g}$ et $\frac{f}{g}$ sont définies sur un vois de a, et dérivables avec $\left(\frac{1}{g}\right)'(a) = \frac{g'(a)}{g^2(a)}$.
(iv) si g dérivable en $f(a)$, $g \circ f$ est dérivable en a et $(g \circ f)'(a) = f'(a) \cdot g'(f(a))$.
(v) si $f : I \to \mathbb{R}$ continue strictement monotone dérivable en a. Alors f^{-1} est dérivable en $f(a)$ SSI $f'(a) \neq 0$ et

$$(f^{-1})'(f(a)) = \frac{1}{f'(a)}.$$

p84

Ex 20 : $\forall x \in]-1, 1[$, $\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.
$\arccos'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$.

~~prop 21 : si f' est de signe constant sur I alors f est monotone.~~

Thm 22 : si $\mathring{I} \neq \emptyset$, f dérivable en $a \in I$. Si f admet un extremum local en $a \in \mathring{I}$, alors $f'(a) = 0$. p82

II. Théorèmes Fondamentaux.

1) TVI

Thm 23 : si I intervalle de $\mathbb{R}$, f continue sur I alors $f(I)$ est un intervalle

Ex 24 : $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 2 & \text{si } 1 < x \leq 2 \end{cases}$ $f(I) = \{1, 2\}$ p56

cor 25 (TVI) : si $I = [a,b]$, $a < b$ et f continue sur I tq $f(a)f(b) < 0$, alors $f(x) = 0$ admet au moins une solution

app 26 : tout polynôme de degré impair à coeff dans $\mathbb{R}$ admet une racine réelle.

2) TAF

Thm 27 (Rolle) : soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue, dérivable sur $]a,b[$ tq $f(a) = f(b)$. Alors $\exists\, c \in]a,b[$ tq $f'(c) = 0$. p132

Ex 28 : $f : \begin{array}{l} [-1,1] \to \mathbb{R} \\ x \mapsto |x| \end{array}$ ne vérifie pas Rolle.

app ㉙ : si $P \in \mathbb{R}[X]$ a toute ses racines réelles, alors $P = \beta(X-a_1)^{\alpha_1} \dots (X-a_p)^{\alpha_p}$ $\forall i,\ \exists b_i \in]a_i, a_{i+1}[$ tq $P'(b_i)=0$, et P est aussi scindé sur $\mathbb{R}$.

Gp 67

Thm ㉚ (TAF) : si f définie sur $[a,b]$, $a<b$, continue et dérivable sur $]a,b[$, alors $\exists c \in]a,b[$ tq $f(b)-f(a) = f'(c)(b-a)$.

R p 151

app ㉛ : (Darboux) soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable. Alors $f'(I)$ est un intervalle de $\mathbb{R}$.

Gp 47

app ㉜ : $f : I \to \mathbb{R}$ dérivable sur I, alors f est croissante sur I ssi $f' \geq 0$ sur I.
(énoncé analogue dans le cas décroissant, constant ou stricte)

R p 154

3) Formules de Taylor

Thm ㉝ : (i) si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ $a<b$ est $\mathcal{C}^n$, $(n+1)$ fois dérivable sur $]a,b[$, alors $\exists c \in]a,b[$ tq : $+\ o(b-a)^n$

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(b-a)^{n+1}$$

(ii) si $f \in \mathcal{C}^{n+1}([a,b])$, $f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k + \int_a^b \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(b-t)^n dt$

p 181-187

app ㉞ : développement limité de fonctions

app ㉟ : f $\mathcal{C}^n$ $n \geq 2$, a tq $f^{(k)}(a) = 0$ $\forall k \in [\![1, n-1]\!]$ et $f^{(n)}(a) \neq 0$
f admet un max (resp min) local en a SSI n est pair et $f^{(n)}(a) < 0$ (resp >0).

III. Suites de fonctions.

On suppose connu les notions de convergences de suites de fonctions

Thm ㊱ : si $f_n \to f$ unif^t, et f_n continue $\forall n$ alors f $\mathcal{C}^0$

Ex ㊲ : $x \xrightarrow{f_n} x^n$ $\in [0,1]$ $\to f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = 1 \\ 0 & \text{si } 0 \leq x < 1 \end{cases}$

Gp 222

Thm ㊳ : soit $f : [0,1] \to \mathbb{C}$ continue : $B_n(f,x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} f(\frac{k}{n})$

alors : (i) $\|f - B_n\|_\infty \leq C\,\omega(\frac{1}{\sqrt{n}})$ $\quad C \in \mathbb{R}_+^*$

(ii) $\exists f$ tq $\|f - B_n\|_\infty \geq \frac{\delta}{\sqrt{n}}$ $\quad \delta \in \mathbb{R}_+^*$.

Z-Q p 508

Thm ㊴ (Dini) : (i) soit $(f_n)_n$ suite croissante de fonctions réelles continues sur $I = [a,b]$. si f_n CVS vers f continue alors la convergence est uniforme.
(ii) on a aussi le même résultat si $\forall n$, f_n est croissante
(iii) si $\forall n$, f_n est convexe sur $]a,b[$ (donc continue) alors $f_n \to f$ unif^t sur les compacts $[\alpha,\beta] \subset]a,b[$.

G p 230

C-Ex : $x \mapsto x^n$

Références : [C] Gourdon (Analyse)
Algèbre pour (29)

(R) : Rombaldi (Eléments d'analyse réelle)

(Z-Q) : Zuily-Queffélec [25]

DVP : ① Polynômes de Bernstein [45]

② Thm de Dini + convexe [39]