224 — Exemples de développements assymptotiques de suites et de fonctions.

[G] p 86 et [T]

①

On suppose connu les notations "o" "O" et "~".

On abrégera Développement assymptotique par DA et Développement limité par DL qui sont uniques.

I. Définitions

X = esp métrique

Def ① : soit X espace métrique, $x_0 \in X$. Une échelle de comparaison est un ensemble $\mathcal{E}$ de fonctions définies au vois de x_0 (sauf peut-être en x_0) vérifiant $\forall f,g \in \mathcal{E}$, $f = g$ ou $f = o(g)$ ou $g = o(f)$

Ex ② : les échelles de comparaisons les plus courantes sont de la forme x^α $\alpha \in \mathbb{R}$; $x^\alpha (\log(x))^\beta e^{cx^\gamma}$ $\gamma > 0$ $\alpha, \beta, c \in \mathbb{R}$

Def ③ : soit $f : D \subset X \to E$, x_0 point d'accumulation de D, $k \in \mathbb{N}^*$. Un DA à k-termes de f par rapport à une échelle $\mathcal{E}$ au vois de x_0 est une expression de la forme

$$c_1 f_1 + c_2 f_2 + \dots + c_k f_k \text{ telle que}$$

(i) $c_1 \dots c_k \in E$ constante

(ii) $f_1 \dots f_k \in \mathcal{E}$ avec $\forall i$, $f_{i+1}(x) = o(f_i(x))$

(iii) $f(x) \underset{x \to x_0}{=} c_1 f_1(x) + \dots + c_k f_k(x) + o(f_k(x))$

Def ④ : si $f : I \to E$, $0 \in I$, $n \in \mathbb{N}^*$. f admet un DL d'ordre n en 0 s'il existe $a_0 \dots a_n \in E$ tq $f(x) = a_0 + \dots + a_n x^n + o(x^n)$

(c'est un DA pour l'échelle $(x \mapsto x^n, n \in \mathbb{N})$.)

II. Développements limités

Thm ⑤ (Taylor Young) : si $f : I \to E$, $0 \in I$ dérivable n fois $n \geq 2$ alors $f(x) \underset{x \to 0}{=} f(0) + f'(0)x + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n + o(x^n)$

app ⑥ : On obtient les DL en 0 suivants :

$\exp(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$

$(1+x)^\alpha = 1 + \frac{\alpha}{1!} x + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} x^n + o(x^n)$ $\forall \alpha \in \mathbb{R}$

Rq ⑦ : en intégrant, on obtient d'autres DL :

$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + o(x^n)$

$\arctan(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots + \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+2})$.

C-Ex ⑧ : l'existence d'un DL d'ordre $n \geq 2$ n'assure pas l'existence de $f''(0)$:

$f(x) = \begin{cases} 1 + x + x^2 + x^3 \sin\left(\frac{1}{x^2}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ n'est pas 2-fois dérivable en 0

mais $f(x) = 1 + x + x^2 + o(x^2)$

Ex ⑨ : (DL en $+\infty$) $(x^3 + x)^{1/3} - (x^3 - x)^{1/3} = \frac{2}{3x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$

app ⑩ : $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x \neq 0}} \left(\frac{\tan(x) - x}{\sin(x) - x} \right) = -2$

app ⑪ (position courbe) $f : \mathbb{R} \setminus \{0,1\} \to \mathbb{R}$, $t \mapsto \frac{t^2+1}{t-1} e^{1/t}$ de courbe notée C_f. On note Δ la droite $y = x + 2$, alors C_f est au dessus de Δ en $+\infty$ ou dessous en $-\infty$.

III. Développements assymptotique de suites

thm ⑫ : si $\alpha > 1$ on a : $\sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} = \frac{1}{\alpha-1} \frac{1}{n^{\alpha-1}} + o\left(\frac{1}{n^{\alpha-1}}\right)$

si $0 < \alpha < 1$ $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha} = \frac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha} + o(n^{1-\alpha})$

FGN p 146

[T] p 132

FGN p 145

app 13 : on pose $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ alors $H_n = \ln(n) + \gamma + \frac{1}{2n} + \frac{1}{12n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ où $\gamma > 0$.

suites récurrentes :

FGN p 96

Ex 14 : soit $c>0$, $f : [0,c] \to [0,c]$, continue admettant un DL en 0 $f(x) = x - a x^{\alpha} + o(x^{\alpha})$ $a>0$, $\alpha > 1$ alors si u_0 est assez petit (dans $I =]0, \eta]$ avec $f(x) < x \ \forall x \in I$) alors notant $u_{n+1} = f(u_n)\ \forall n$, on a : $u_n \sim \frac{1}{(na(\alpha-1))^{1/(1-\alpha)}}$

application 15 : $u_{n+1} = \ln(1+u_n)$ et $u_0 \in \mathbb{R}_+^*$, on obtient $u_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{2}{n}$.

p 38

Ex 15 : $u_0 > 0$, $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n}$, on a $u_n \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{2n}$

suites implicites

p 116

Ex 16 : a_n la plus grande racine réelle de $x^{2n} - 2nx + 1$ alors $a_n = 1 + \frac{\ln(n)}{2n} + o\left(\frac{\ln(n)}{n}\right)$.

Ex 17 : $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ suite de réels tq $\forall n \ u_n^5 + n u_n - 1 = 0$

$u_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n^6} + o\left(\frac{1}{n^6}\right)$.

autre exemple

G p 12

Ex 18 : $\forall n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n(x)\,dx$. On a : $I_n \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$

p 211

application 19 : $n! \underset{n \to +\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$.

Thm 20 : (Euler-Mac Laurin) : Soit $(m,n) \in \mathbb{Z}^2$ $m<n$, $r \in \mathbb{N}^*$ et $f : [m,n] \to \mathbb{C}$ $\mathcal{C}^r$ alors

$$\sum_{k=m}^{n} f(k) = \int_m^n f(x)\,dx + \frac{f(m)+f(n)}{2} + \sum_{k=2}^{r} \frac{b_k}{k!}\left(f^{(k-1)}(n) - f^{(k-1)}(m)\right) + R_r$$

[M] p 32

où $R_r = \frac{(-1)^{r+1}}{r!} \int_m^n \tilde{B}_r(x) f^{(r)}(x)\,dx$

où $\tilde{B}_r$ 1-périodique, qui vaut B_r sur $]0,1[$ r-ième pol de Bernoulli, tq $\tilde{B}_r(0) = \frac{1}{2}(B_r(0) + B_r(1))$, $b_k = B_k(0)$

app 21 : $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \log(n) + \gamma + \frac{1}{2n} + \sum_{k=2}^{r-1} \frac{(-1)^{k-1} b_k}{k n^k} + O\left(\frac{1}{n^r}\right)$

IV. Développements assymptotiques de fonctions

[G] p 169

Ex 22 : $\forall x \geq 2$, on note $Li(x) = \int_2^x \frac{dt}{\log(t)}$, on a

$$Li(x) = \frac{x}{\log(x)} + \frac{1!\,x}{\log^2(x)} + \frac{2!\,x}{\log^3(x)} + \dots + \frac{n!\,x}{\log^{n+1}(x)} + o\left(\frac{x}{\log^{n+1}(x)}\right)$$

[G] p 283 [M]

Ex 23 : $\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$, on a un DA quand $x \to 1^+$: $\zeta(x) = \frac{1}{x-1} + \gamma + o(1)$

comportement assymptotique de Γ

[B] p 80

Def 24 : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, on pose $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1}\,dt$

prop 25 : $\Gamma(x) \underset{x \to +\infty}{\sim} \sqrt{2\pi x}\left(\frac{x}{e}\right)^x$, en particulier, on retrouve la formule [19].

application (26) : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $\dfrac{1}{\Gamma(x)} = \lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{x(x+1)\cdots(x+n)}{n!\,n^x}$

(formule de Weierstrass)

Références :

[B] Bost (poly) (pour Γ)

[FGN] Oraux X-ENS 1

[G] Gourdon (Analyse)

[M] Madère (Prépa à l'oral)