215 Applications différentiables définies sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$, Exemples et applications

Dans cette leçon, U désigne un ouvert de $\mathbb{R}^n$ $n\in\mathbb{N}^*$ et $p\in\mathbb{N}^*$, $f:U\to\mathbb{R}^p$.

I. Définitions et propriétés

(G) p 299

Déf 1: Soit $f:U\to\mathbb{R}^p$. elle est différentiable en a s'il existe φ une application linéaire de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$ telle que $f(a+h) = f(x) + \varphi(h) + o_{h\to 0}(\|h\|)$

Si φ existe, φ est unique et s'appelle différentielle de f en a notée $d_a f$.

Si f est différentiable en tout point de U, on dit que f est différentiable. Si $a \overset{df}{\mapsto} d_a f$ est continue, f est dite $\mathcal{C}^1$.

p 300

Ex 2: • si $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^p$ est dérivable, alors f est différentiable et $d_a f : h\mapsto f'(a)h$. $\forall a\in\mathbb{R}$.

• si $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^p$ est linéaire, f est différentiable et $d_a f = f$.

Prop 3: (i) si f différentiable en a, alors f est continue en a.

(ii) si $g:U\to\mathbb{R}^p$ est différentiable en a, alors $f+\lambda g$ l'est aussi et $d_a(f+\lambda g) = d_a f + \lambda d_a g$.

Thm 4: soit $V\subset\mathbb{R}^p$ un ouvert contenant $f(U)$ et $g:V\to\mathbb{R}^k$ différentiable en $f(a)$, alors $g\circ f$ est différentiable en a et $d_a f\circ g = d_{f(a)} g\circ d_a f$.

App 5: si $f:U\to f(U)$ est bijective et différentiable alors si $f(U)$ est ouvert et que f^{-1} est différentiable, alors $\forall a\in U$, $d_{f(a)} f^{-1} = (d_a f)^{-1}$.

Déf 6: soit $a\in U$ et $v\in\mathbb{R}^n$. Si la fonction à variable réelle $\varphi : t\mapsto f(a+tv)$ est dérivable en $t=0$, alors f est dite dérivable en a selon le vecteur v et on note

$$\frac{\partial f}{\partial v}(a) = \varphi'(0) = \lim_{\substack{t\to 0\\ t\neq 0}} \left(\frac{f(a+tv)-f(a)}{t}\right).$$

si v est le vecteur e_i de la base canonique alors on note $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$ appelée dérivée partielle en a selon e_i.

p 304

Prop 7: Si f est différentiable en un point a, alors f admet une dérivée selon tout vecteur en a et $\frac{\partial f}{\partial v}(a) = d_a f(v)$ $\forall v\in\mathbb{R}^n$.

Ex 8: $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, $(x,y)\mapsto \begin{cases} y^2/x & \text{si } x\neq 0\\ y & \text{si } x=0\end{cases}$ admet des dérivées selon tous les vecteurs en $(0,0)$ mais n'est pas continue

p 305

Thm 9: Si toutes les dérivées partielles de f sur U existent et sont continues en $a\in U$, alors f est différentiable en a et $d_a f(h) = \sum_{i=1}^n h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$ $\forall h\in\mathbb{R}^n$.

Ex 10: • $\det : \mathcal{M}_n(\mathbb{R})\to\mathbb{R}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et $d_X \det(H) = \operatorname{tr}({}^t\operatorname{com}(X) H)$ $\forall X,H\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

R p 74

• Soient $y_1,\dots,y_n$ des solutions dans $\mathbb{R}^n$ du système linéaire $y' = A(t)y$ où $t\mapsto A(t)$ est une fonction continue de t. On note $w(t) = \det(y_1(t),\dots,y_n(t))$

2

Par déterminant wronskien, On a $w'(t) = tr(A(t))w(t)$ et on en déduit que $\det(e^{tA}) = e^{t\,tr(A)}$.

II. Théorème des accroissements finis.

(G) p 304

Thm 11: soit $(a,b) \in U^2$ tels que $[a,b] \subset U$ où $[a,b] = \{ta + (1-t)b, t \in [0,1]\}$. On suppose f continue sur $[a,b]$, différentiable en tout point de $]a,b[$ et que $\exists M > 0$ tq $\|d_x f\| \leq M$ $\forall x \in]a,b[$, alors,
$\|f(b) - f(a)\| \leq M\|b-a\|$.

cor 12: • si U est convexe, f différentiable sur U et si $\|d_x f\| \leq M$ $\forall x \in U$, alors f est M-lipschitzienne
• si U est connexe et $d_x f = 0$ $\forall x \in U$, alors f est constante sur U.

R p 187

application 13: • soit $f_n : U \to \mathbb{R}^p$ une suite d'applications différentiables sur U. On suppose que :
(i) les f_n convergent simplement sur U
(ii) le df_n convergent uniformément sur U. Alors $\lim f_n$ est différentiable sur U et $d \lim\limits_k f_k = \lim\limits_k df_k$
si les f_k sont de plus $\mathcal{C}^1$, $\lim f_k$ aussi
• $\exp : M \in M_n(\mathbb{R}) \to \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{M^k}{k!}$ est de classe $\mathcal{C}^1$.

III. Différentielle d'ordre 2

p 275

Def 14: On dit que f est deux-fois différentiable en $a \in U$ si $df : x \to d_x f$ est différentiable en a, et on note $d_a^2 f = d_a(df) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p))$ qui s'identifie à l'espace des applications bilinéaire continue de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$

Dans ce cas, les composantes $\frac{\partial f}{\partial x_j}(x)$ de $d_x f$ admettent des dérivées partielles en a, notée $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a)$.

(G) p 302

Def 15: f est dite de classe $\mathcal{C}^2$ si ses dérivées partielles d'ordre 2 existent et sont continues

Thm 16: soit f de classe $\mathcal{C}^2$ en un point $c \in U$, alors $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$ $\forall i,j \in [1,n]$.

p 308

Ex 17: soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$
$$(x,y) \mapsto \begin{cases} xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$
alors f n'est pas de classe $\mathcal{C}^2$ en $(0,0)$.

(R) p 280

Thm 18: (Formules de Taylor) : si f est 2-fois différentiable en $a \in U$, on a :
• $f(a+h) - f(a) - d_a f(h) - \frac{1}{2}d_a^2 f(h,h) = o(\|h\|^2)$
• si f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur U, et si $[a, a+h] \subset U$, on a :
$f(a+h) - f(a) - d_a f(h) = \int_0^1 (1-t)\, d_{a+th}^2 f(h,h)\, dt$.

IV. Lien avec les extrema locaux

Dans cette partie, $p = 1$

(G) p 310

Def 19: si f est différentiable en $a \in U$ et que $d_a f = 0$ on dit que a est un point critique de f.
• si f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur U, on définit la matrice hessienne de f en $a \in U$ par $H_a(f) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a)\right)_{i,j}$ qui est symétrique par Thm 16.

p 311

prop 20 : si $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ admet un extremum local en un point $a \in U$ et si f est différentiable en a, alors $d_a f = 0$

Thm 21 : si f est $\mathcal{C}^2$ et qu'il existe $a \in U$ tel que $d_a f = 0$ alors : (i) si f admet un minimum (resp. un maximum) local en a, alors $H_a(f)$ est ...... positive (resp. négative) — p 310

(ii) si $H_a(f)$ est définie positive (resp. négative) f admet un minimum (resp. maximum) local en a.

Ex 22 : $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto x^4 + y^4 - 2(x-y)^2$ admet un point critique en $(0,0)$ qui n'est pas un extremum local. — p 311

application 23 : (Principe du maximum). Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ $\mathcal{C}^2$ telle que $\Delta f = 0$ où $\Delta f = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}$. Alors $\forall x \in B(0,1)$

$$\min_{\|y\|=1} f(y) \leq f(x) \leq \max_{\|y\|=1} f(y).$$

V. Application à la géométrie différentielle

Def 24 : Soient U et V deux ouverts de $\mathbb{R}^n$ et $f : U \to V$. f est un $\mathcal{C}^k$-difféomorphisme $(k \geq 1)$ si f est bijective et si f^{-1} est de classe $\mathcal{C}^k$. — p 317

Thm 25 : (inversion locale) : Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $a \in U$ et $f : U \to \mathbb{R}^n$ $\mathcal{C}^k$ telle que $d_a f$ inversible. Alors $\exists\, V$ voisinage de a et W voisinage de $f(a)$ tels que $f : V \to W$ soit un $\mathcal{C}^k$-difféomorphisme. — [R] p 176

app 26 : $\exp : \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \to GL_n(\mathbb{C})$ est surjective.

Thm 27 . (Fonctions implicites). Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r$, $(a,b) \in U$ et $f : U \to \mathbb{R}^r$ de classe $\mathcal{C}^1$. On suppose que $f(a,b) = 0$ et que la matrice $d_y f(a,b)$ formée des dérivées partielles par rapport à y est inversible. Alors il existe V voisinage de a dans $\mathbb{R}^n$ et W voisinage de b dans $\mathbb{R}^r$ et $\varphi : V \to W$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que — p 180-2

$(x \in V, y \in W$ et $f(x,y) = 0) \iff (x \in V$ et $y = \varphi(x))$. De plus $D_y f(x,y)$ est inversible $\forall (x,y) \in V \times W$ et

$$D_\varphi(x) = -\left(D_y f(x, \varphi(x))\right)^{-1} \circ D_x f(x, \varphi(x)).$$

app 28 : L'ensemble des polynômes scindés à racines simples est un ouvert de $\mathbb{R}_n[X]$ — [B] p 11

Def - prop 29 : Soit $F \subset \mathbb{R}^n$ un sev de dimension d. une partie Π de $\mathbb{R}^n$ est une sous-variété de classe $\mathcal{C}^k$ si $\forall m \in \Pi$, il existe un voisinage de m tel que l'un des points suivants est vérifié : — (A) p 53-4

(i) $\exists\, \varphi : U \to \varphi(U)$ $\mathcal{C}^k$-difféomorphisme vérifiant $\varphi(U \cap \Pi) = \varphi(U) \cap F$

(ii) $\exists\, n-d$ fonctions $f_i : U \to \mathbb{R}$ $\mathcal{C}^k$ tq $U \cap \Pi = \bigcap f_i^{-1}\{0\}$ et $(D_u f_i)_{i=1}^{n-d}$ est libre $\forall u \in U$.

Def 30 : Soit Π une sous-variété de $\mathbb{R}^n$. Un vecteur v est dit tangent en m à Π s'il existe un intervalle ouvert I contenant 0 et $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$ dérivable tq $\gamma(t) \in \Pi\ \forall t \in I$, $\gamma(0) = m$ et $\gamma'(0) = v$. — (A) p 97

On note $T_m\Pi$ l'ensemble des vecteurs tangent en m à Π appelé espace tangent.

Ex 31 : Étude de $SL_n(\mathbb{K})$ et $O(n)$ comme sous-variétés — [R] p 268

prop 33 : $T_m\Pi = D_m\varphi^{-1}(\mathbb{R}^d \times \{0\})$ et $T_m\Pi = \bigcap_{i=1}^{n-d} \ker(d_m f_i)$

Thm 34 : (Extrema liés). Soient $f, g_1 \ldots g_r : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ des fonctions $\mathcal{C}^1$. soit $\Pi = \{x \in U, g_1(x), \ldots, g_r(x) = 0\}$. Si $f_{|\Pi}$ admet un extremum local en a et si les $(d_a g_i)_{i=1}^{r}$ sont libres alors $\exists\, \lambda_1 \ldots \lambda_r \in \mathbb{R}$ tq $d_a f = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i d_a g_i$ — [G] p 311

app 35 : soit $u \in \mathcal{L}(E)$ endo symétrique, u est diagonalisable.

Références :

(A) : Avez (Calcul différentiel). (Pour le fin)
(B) : Beck (objectif agreg)
(C) : Gourdon Analyse
(R) : Rouvière (PGCD).