214 Théorème d'inversion locale, théorème des fonctions implicites, ex et appli en géométrie

①

I. Théorème d'inversion locale.

A. Inversion locale

ROU p 54

Def 1: Soient V et W des ouverts de $\mathbb{R}^n$ $(n \in \mathbb{N}^*)$. On dit que $\varphi : V \longrightarrow W$ est un $\mathcal{C}^k$-difféomorphisme si φ est de classe $\mathcal{C}^k$, φ est bijectif, et φ^{-1} est de classe $\mathcal{C}^k$ $(k \in \mathbb{N}^*)$

ROU p 188

Thm 2: (Inversion locale) : Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $a \in U$. Soit $f : U \to \mathbb{R}^n$ une application de classe $\mathcal{C}^1$. On suppose que la matrice jacobienne

$$Df(a) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(a) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(a) \end{pmatrix}$$

est inversible.

alors il existe un ouvert $V \subset U$ contenant a, et un ouvert W contenant $f(a)$ tels que :

$$f : V \longrightarrow W \text{ est un } \mathcal{C}^1\text{-difféomorphisme}.$$

(on dit dans ce cas que f est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme locale en a.)

ROU p 202 et 208

Exemples 3: • $f : (x,y) \longmapsto (x+y, xy)$ est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme locale en tout point (x,y), $x \neq y$.

• $\exp : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow GL_n(\mathbb{R})$ est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme au voisinage de 0, ce qui permet de construire ~~un~~ logarithme d'une matrice sur un voisinage de I_n.

LAF p 25

• $g : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $M \longmapsto M^2$ est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme local en I_n, ce qui permet de construire des racines carrés de matrices ~~par~~ voisinage de I_n.

ROU p 191

Rq 4: si f est de classe $\mathcal{C}^k$ dans le théorème d'inversion locale, sous les mêmes hypothèses, f sera un $\mathcal{C}^k$-difféomorphisme local.

ROU p 204

Contre-ex 5: $f : x \longmapsto \begin{cases} x + x^2 \sin\left(\frac{\pi}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ n'est inversible sur aucun voisinage de 0.

B. Inversion Global

ROU p 191

Thm 6: (Inversion globale) : Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $f : U \to \mathbb{R}^n$ $\mathcal{C}^1$. On suppose que f est injective sur U et que $\forall x \in U$, $Df(x)$ est inversible.
Alors $f(U)$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et f est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de classe ~~de~~ de U sur $f(U)$.

Ex 7: • soit $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{0,0\}$ et $f : (x,y) \overset{\in U}{\longmapsto} (x^2-y^2, 2xy)$ alors f est un difféomorphisme local en tout point mais pas global.

• (changement de variable en coordonnées polaire).

ROU p 72

soit $f : \mathbb{R}_+^* \times]-\pi, \pi[\longrightarrow \mathbb{R}^2 \setminus (\mathbb{R}_- \times \{0\})$

$(r, \theta) \longrightarrow (r\cos\theta, r\sin\theta)$

alors f est un $\mathcal{C}^\infty$-difféomorphisme.

p 190

coro 8: si $f : U \to V$ est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme local en tout point de U, alors $f(U)$ est ouverte et si V est connexe et $f(U)$ est fermé, alors $f(U) = V$ (f est surjective).

ZAV

application 9: $\exp : \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \longrightarrow GL_n(\mathbb{C})$ est une application surjective

C. Fonctions holomorphes

Thm 10 : (Inversion locale holomorphe) : soit $f : U \to \mathbb{C}$ une application holomorphe et $z_0 \in U$ telque $f'(z_0) \neq 0$. Alors f est un biholomorphisme au voisinage de z_0 : $\exists V \subset U$ voisinage de z_0 et $f : V \to f(V)$ est bijective d'inverse f^{-1} holomorphe.

ROUP 191

Thm 11 : (Inversion globale holomorphe) : soit U un ouvert connexe de $\mathbb{C}$ et $f : U \to \mathbb{C}$ holomorphe et injective. Alors $f(U)$ est un ouvert de $\mathbb{C}$ et f réalise un biholomorphisme de U sur $f(U)$.

Ex 12 : $z \to z^2$ réalise un biholomorphisme de $\{z \in \mathbb{C},\ Re(z) > 0\}$ sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$

II. Théorème des fonctions implicites

ROUP 192

Thm 13 : (Fonctions implicites) : Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$, $(a,b) \in U$ et $f : \begin{array}{l} U \longrightarrow \mathbb{R}^p \\ (x,y) \mapsto f(x,y) \end{array}$ de classe $\mathcal{C}^1$.
On suppose que $f(a,b) = 0$ et que $D_y f(a,b)$. (matrice jacobienne formée des dérivées partielles par rapport à y) est inversible.
Alors • il existe V voisinage ouvert de a ds $\mathbb{R}^n$, W voisinage ouvert de b dans $\mathbb{R}^p$ telsque $V \times W \subset U$
• il existe $\varphi : V \to W$ telle que φ est $\mathcal{C}^1$ et
$$(x \in V, y \in W \text{ et } f(x,y) = 0) \Leftrightarrow (x \in V \text{ et } y = \varphi(x))$$
• On a de plus $D\varphi(x) = -D_y f(x, \varphi(x))^{-1} \circ D_x f(x, \varphi(x))$

Rq 14 : Le même thm est vrai en remplaçant "$\mathcal{C}^1$" par "$\mathcal{C}^k$"

ROUP 193

Ex 15 : $f(x,y) = x^2 + y^2 - 1$ $\quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2y \neq 0$ si $y \neq 0$
on a alors deux fonctions implicites : $\varphi_1(x) = \sqrt{1 - x^2}$ et $\varphi_2(x) = -\sqrt{1 - x^2}$

ROUP 237

Ex 16 : (Folium de Descartes) : on note $\mathcal{C} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, f(x,y) = 0\}$ où $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$. ceci définit y comme fonction implicite de x.

BEC p11/12

application 17 : Soient $P_0 \in \mathbb{R}_n[X]$ et x_0 une racine simple de P_0. Alors x_0 dépend localement du polynôme de manière $\mathcal{C}^\infty$: il existe U voisinage de P_0 dans $\mathbb{R}_n[X]$ et V vois de x_0 dans $\mathbb{R}$ et $\varphi : U \to V$ $\mathcal{C}^\infty$ tq :
$$\forall P \in U,\ \forall x \in V,\quad P(x) = 0 \Leftrightarrow x = \varphi(P).$$

application 18 : L'ensemble des polynômes scindés à racines simples de $\mathbb{R}_n[X]$ est un ouvert de $\mathbb{R}_n[X]$.

III. Sous-variétés de $\mathbb{R}^n$

A. Définition et exemples

Def-prop 19 : soit $M \subset \mathbb{R}^n$. On dit que M est une sous-variété de dimension p si l'une des conditions suivantes est vérifiées :

LAF p 29

(i) (Carte locale) : $\forall a \in M$, $\exists U \subset \mathbb{R}^n$ voisinage de a et $f : U \to F(U)$ un $\mathcal{C}^1$ difféomorphisme $(0 \in f(U))$ telsque
$$F(M \cap U) = \mathbb{R}^p \times \{0\}_{n-d} \cap f(U)$$
(ii) (implicite) $\forall a \in M$, $\exists$ vois ouvert U de a dans $\mathbb{R}^n$ et $g : U \to \mathbb{R}^{n-p}$ $\mathcal{C}^1$ vérifiant $D_x g$ surjective $\forall x \in U$ et telleque $U \cap M = g^{-1}(\{0\})$
(iii) (Paramétrage) : $\forall a \in M$, $\exists U$ voisinage de a, Ω ouvert de $\mathbb{R}^p$ contenant 0 et $h : \Omega \to \mathbb{R}^n$ vérifiant $D_x h$ injective $\forall x \in \Omega$ et h homéomorphisme de Ω sur $U \cap M$

(iv) (Graphe) $\forall a \in \Pi$, $\exists U$ vois de a dans $\mathbb{R}^n$ et V un ouvert de $\mathbb{R}^p$ contenant $(a_1, \dots, a_p)$ et une application $\mathcal{C}^1$ $G : V \to \mathbb{R}^{n-p}$ tels que :

$$\Pi \cap U = \{(x, G(x)),\ x \in V\} \subset \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^{n-p}.$$

ROU p284 LAF p31

Ex 20 : • La sphère $S^n = \{x = (x_0 \dots x_n) \in \mathbb{R}^{n+1},\ \sum_{i=0}^{n} x_i^2 - 1 = 0\}$ est une sous-variété de dimension n (de classe $\mathcal{C}^\infty$)

• $O(n)$ est une sous-variété de dimension $\frac{n(n-1)}{2}$.

• $SL_n(\mathbb{R})$ est une sous-variété de dimension $n^2 - 1$

• Le folium de Descartes n'est pas une sous variété de $\mathbb{R}^2$.

B. Espace tangent.

AVEZ p97

Def 21 : • soit Π une sous variété de $\mathbb{R}^n$. Un vecteur v est dit tangent en m à Π si il existe un intervalle ouvert I contenant 0 et une application $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$ dérivable tels que : $\gamma(t) \in \Pi\ \forall t \in I$, $\gamma(0) = m$, $\gamma'(0) = v$.

• L'espace tangent en m à Π est l'ensemble :

$$T_m\Pi = \{v \in \mathbb{R}^n,\ v \text{ est tangent à } \Pi \text{ en } m\}.$$

ROU p284 AVEZ p98

Thm 22 : L'espace tangent $T_m\Pi$ est un sous-espace vectoriel de dimension celle de Π, de plus :

(i) (carte locale) $T_m\Pi = D_m f^{-1}(\mathbb{R}^p \times \{0\})$

(ii) (implicite) $T_m\Pi = \ker(D_m g)$

(iii) (Paramétrage) $T_m\Pi = \mathrm{Im}(D_{\varphi^{-1}(m)} h)$

(iv) (Graphe) $T_m\Pi = \{(v, DG(u)v),\ v \in \mathbb{R}^p\}$ où $m = (u, G(u))$

Ex 23 : • $\forall X \in SL_n(\mathbb{R})$, $T_X SL_n(\mathbb{R}) = \{H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ \mathrm{tr}(X^{-1}H) = 0\}$

• $\forall X \in O_n(\mathbb{R})$, $T_X O_n(\mathbb{R}) = X . A_n(\mathbb{R})$

C. Extrema liés

ROU p372

Thm 24 : Soient $f, g_1, \dots, g_p$ des fonctions réelles de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert U de $\mathbb{R}^n$. On note $\Pi = \{x \in U,\ g_i(x) = 0\ \forall i \in [\![1, p]\!]\}$.
On suppose que $f_{|\Pi}$ admet un extremum local en $a \in \Pi$ et que $(Dg_1(a), \dots, Dg_p(a))$ forme une famille libre de $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ alors, il existe des coefficients réels $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ appelés multiplicateurs de Lagrange tels que $Df(a) = \lambda_1 Dg_1(a) + \dots + \lambda_p Dg_p(a)$.

AVEZ p163

application 25 : Soit u un endomorphisme symétrique de $\mathbb{R}^n$, alors u est diagonalisable (à valeurs propres réelles)

ROU p410

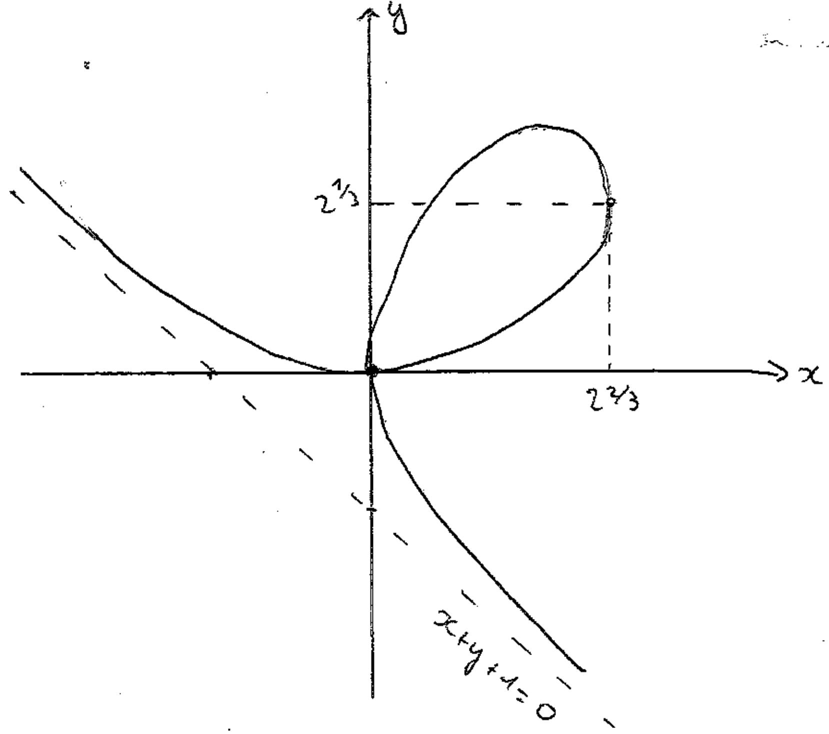
application 26 : (Inégalité de Hadamard) soient $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{R}^n$ alors $|\det(v_1, \dots, v_n)| \leq \|v_1\| \dots \|v_n\|$ où $\|x\|$ désigne la norme euclidienne usuelle de $\mathbb{R}^n$.

Références:

[ROU]: Rouvière, (PGCD)

[AVEZ]: Avez, (calcul différentiel)

[LAF]: Lafontaine (Introduction aux variétés différentielles)



Folium de Descartes