213 Espaces de Hilbert. Bases hilbertiennes. Exemples et applications.

Ici, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$; H désignera un espace de Hilbert

I. Définitions et propriétés

[H] p84 **Def ①** : Un espace vectoriel E sur $\mathbb{K}$ est dit préhilbertien si il est muni d'un produit scalaire $\langle .|. \rangle$ ie une application de $E \times E$ dans $\mathbb{K}$ vérifiant
(i) $\forall y \in E$, $\langle \cdot, y \rangle$ est linéaire
(ii) $\forall x, y \in E$ $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$ (symétrie hermitienne)
(iii) $\langle x, x \rangle \geq 0$ avec égalité SSI $x = 0$.
On notera $\|\cdot\| = \langle .|. \rangle^{1/2}$ qui est une norme sur E

p85 **Ex ②** : $E = \mathcal{C}^0_c(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ munit de $\langle f, g \rangle = \int_{\mathbb{R}} f(x) g(x) dx$

prop ③ : (Cauchy, Schwarz) $\forall x, y \in E$, on a : $|\langle x, y \rangle|^2 \leq \|x\|^2 \|y\|^2$

cor ④ : sur E espace préhilbertien, $\forall y \in E$, $\phi_y = \langle \cdot, y \rangle$ est une forme linéaire continue de norme $\|y\|$. Ainsi $y \longrightarrow \phi_y$ est une isométrie de E dans E' (dual topologique).

prop ⑤ : (parallélogramme) $\forall x, y \in E$, on a
$\left\| \frac{x+y}{2} \right\|^2 + \left\| \frac{x-y}{2} \right\|^2 = \frac{1}{2} \left(\|x\|^2 + \|y\|^2 \right)$.

p88 **Def ⑥** : Un espace de Hilbert est un espace préhilbertien complet pour $\|.\|$.

p85 **Ex ⑦** : $\mathbb{L}^2(X, \mathcal{A}, \mu)$ est un espace de Hilbert pour $\langle f, g \rangle = \int_X f \bar{g} \, d\mu$.
. $\ell^2(\mathbb{N}) = \{ (x_i)_{i \in \mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}, \sum_{i \geq 0} |x_i|^2 < +\infty \}$. $\langle x, y \rangle = \sum_{i \in \mathbb{N}} x_i \bar{y_i}$

Def ⑧ : x et $y \in E$ sont dit orthogonaux si $\langle x, y \rangle = 0$ p87
si $A \subset E$, $A^\perp = \{ x \in E, \langle x, y \rangle = 0 \ \forall y \in A \}$
$= \bigcap_{y \in A} \ker(\phi_y)$

prop ⑨ : (i) $\overline{\mathrm{vect}(A)}^\perp = A^\perp$
(ii) $x \perp y \Leftrightarrow \|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$ (Pythagore).

II. Projection et thm de représentation

Thm ⑩ : soit $\mathcal{C}$ une partie convexe, fermée et non vide de H. Alors, $\forall x \in E$, il existe un unique point y de $\mathcal{C}$ tel que $\|x - y\| = d(x, \mathcal{C})$. p91
Ce point est appelé projection de x sur $\mathcal{C}$ et noté $p_{\mathcal{C}}(x)$.
Il est caractérisé par la propriété :
$y \in \mathcal{C}$ et $\forall z \in \mathcal{C}$ $\mathrm{Re} \langle x - y, z - y \rangle \leq 0$.

cor ⑪ : soit F un sev fermé de H. alors p_F est un opérateur linéaire de H sur F et si $x \in H$, alors $p_F(x)$ est l'unique élément $y \in H$ tel que $y \in F$ et $x - y \in F^\perp$.
En particulier, $E = F \oplus F^\perp$.

cor ⑫ : si F sev de H, alors F est dense dans H SSI $F^\perp = \{0\}$ et $\overline{F} = F^{\perp\perp}$ p94

Ex ⑬ : $H = \ell^2(\mathbb{N})$ et $F = \{ (x_n)_n, \exists N \in \mathbb{N}, x_n = 0 \ \forall n \geq N \}$.
alors $\overline{F} = H$ et $F^\perp = \{0\}$ (mais $\overline{F} \neq F$).

app 14 : Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité et $\mathcal{F}$ une sous tribu de $\mathcal{A}$. Alors $\forall X \in \mathbb{L}^2(\Omega, \mathcal{A})$, on appelle espérance conditionnelle de X sachant $\mathcal{F}$ la projection orthogonale de X sur $\mathbb{L}^2(\Omega, \mathcal{F})$, notée $\mathbb{E}[X|\mathcal{F}]$.

Thm 15 : (Représentation de Riesz) L'application

p96 $H \to H'$, $y \mapsto \phi_y = \langle \cdot, y \rangle$ est une isométrie surjective. Donc $\forall \phi \in H', \exists! y, \ \phi(x) = \langle x, y\rangle \ \forall x \in H$

Cor 16 : Pour tout $T \in \mathcal{L}(H)$, il existe opérateur $T^* \in \mathcal{L}(H)$

p97 tel que $\forall x, y \in H \ \langle T(x), y\rangle = \langle x, T^*(y)\rangle$. T^* est appelé adjoint de T, et $\|T^*\| = \|T\|$.

III. Bases hilbertiennes

Def 17 : Soit H un espace de Hilbert. Une base hilbertienne de H est une famille $(e_i)_{i\in I}$ vérifiant :

p108
(i) $(e_i)_{i\in I}$ est orthonormée (ie $\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}$)
(ii) $(e_i)_{i\in I}$ est totale (ie $\overline{\mathrm{vect}(e_i, i \in I)} = H$)

Ex 18 : $H = \ell^2(\mathbb{N})$ et $(e_j)_{j\in\mathbb{N}}$ définie par

p109 $e_j(i) = \delta_{ij}$, alors $(e_j)_{j\in\mathbb{N}}$ est une base hilbertienne de H

prop 19 : Soit $(e_j)_{j\in J}$ une famille orthonormale finie de H, et soit $F = \mathrm{vect}(e_j | j \in J)$, alors $\forall x \in H$, la projection orthogonale $P_F(x)$ de x sur F est donnée par

$$P_F(x) = \sum_{j\in J} \langle x, e_j \rangle e_j$$

et $\|x\|^2 = \|x - \sum_{j\in J} \langle x, e_j\rangle e_j\|^2 + \sum_{j \in J} |\langle x, e_j \rangle|^2$

Cor 20 : Soit $(e_i)_{i\in I}$ une famille orthonormale de H. alors $\forall x \in H \quad \sum_{i\in I} |\langle x, e_i\rangle|^2 \leq \|x\|^2$ (vrai $\forall$ famille finie $J \subset I$ $\to \sup_J$)

Thm 21 (Bessel-Parseval) : Soit $(e_i)_{i\in I}$ une famille orthonormale de H. On a équivalence entre
(i) $(e_i)_{i\in I}$ est une base hilbertienne de H
(ii) $\forall x \in H \quad \|x\|^2 = \sum_{i\in I} |\langle x, e_i\rangle|^2$
(iii) $\forall x, y \in H, \quad \langle x, y \rangle = \sum_{i \in I} \langle x, e_i \rangle \langle e_i, y\rangle$

Ainsi, l'application $H \to \ell^2(I)$, $x \mapsto (\langle x, e_i\rangle)_{i\in I}$ est une isométrie linéaire surjective et $\forall x \in H, \quad x = \sum_{i\in I} \langle x, e_i\rangle e_i$.

Def 22 : Un espace métrique (X, d) est dit séparable p7-9
s'il contient une partie dénombrable dense

prop 23 : soit $N \in \{1, 2, \dots\} \cup \{\infty\}$ et $(f_n)_{n=0}^{N}$ une famille libre de H, il existe une famille orthonormale $(e_n)_{n=0}^{N}$ de H telle que $\forall n \leq N$, $\mathrm{vect}((e_p), p \leq n) = \mathrm{vect}((f_p), p \leq n)$, elle peut être construite p112
en posant $e_0 = \frac{f_0}{\|f_0\|}$ et $\begin{cases} x_{n+1} = f_{n+1} - P_n(f_{n+1}) \\ e_{n+1} = \frac{x_{n+1}}{\|x_{n+1}\|} \end{cases}$

où P_n est la projection orthogonale sur $\mathrm{vect}((f_p), p \leq n)$

Cor 24 : Un espace de Hilbert de dimension infinie est séparable SSI il admet une base hilbertienne dénombrable.

[BECK]

IV. L'Espace $\mathbb{L}^2(I, p)$

Déf (25) : Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. On appelle fonction poids une fonction $p : I \to \mathbb{R}$ mesurable, strictement pos et telle que $\forall n \in \mathbb{N}$ $\int_I |x|^n p(x)\,dx < +\infty$.
- on note $\mathbb{L}^2(I,p)$ l'espace des fonctions de carré intégra par la mesure de densité p, muni du produit scalaire $\langle f, g\rangle_p = \int_I f(x)\overline{g(x)}p(x)\,dx$.

Thm (26) : $(\mathbb{L}^2(I,p), \langle\cdot,\cdot\rangle_p)$ est un espace de Hilbert.

Déf-prop (27) : Il existe une unique famille $(P_n)_n$ de polynômes unitaires, orthogonaux 2 à 2 tq $\deg(P_n) = n$. On l'appelle famille des polynômes orthogonaux.

Thm (28) : Soit I un intervalle non borné de $\mathbb{R}$ et p une fonction poids. On suppose qu'il existe $\alpha > 0$ tel que $\int_I e^{\alpha|x|}p(x)\,dx < +\infty$. Alors les polynômes orthogonaux associés à p forment une base hilbertienne de $\mathbb{L}^2(I,p)$ (à renormalisation près).

Ex (29) : soit $I = \mathbb{R}$, $p(x) = e^{-x^2}$, on obtient les polynôme de Hermite :
$P_0 = 1$ $\quad P_1 = X$. $\quad P_2 = X^2 - \frac{1}{2}$ $\quad P_3 = X^3 - \frac{3}{2}X$.

[BREZIS]

V. Espace de Sobolev

Déf (30) : Soit $f \in \mathbb{L}^1(]0,1[)$. On dit que f admet une dérivée faible si $\exists g \in \mathbb{L}^1(]0,1[)$ telle que $\forall \varphi \in \mathcal{C}_c^\infty$ $\int f\varphi' = -\int g\varphi$. On note alors $g = f'$ qui est unique.
- on appelle Espace de Sobolev l'ensemble
$H^1(]0,1[) = \{u \in \mathbb{L}^2(I),\ u$ admet une dérivée faible $u' \in \mathbb{L}^2\}$ p120
on le munit du produit scalaire : $\langle f, g\rangle_{H^1} = \int fg + \int f'g'$.

Thm (31) : $(H^1(]0,1[), \langle\cdot,\cdot\rangle_{H^1})$ est un espace de Hilbert p121

prop (32) : soit $u \in H^1(]0,1[)$, il existe $\tilde{u} \in \mathcal{C}^0([0,1])$ telle que $u = \tilde{u}$ p.p sur I. (on identifiera toujours un élément $u \in H^1(]0,1[)$ avec son représentant continu) p122

Déf (33) : on note $H_0^1(]0,1[)$ l'adhérence dans $H^1(]0,1[)$ de $\mathcal{C}_c^\infty(]0,1[)$. (c'est encore un espace de Hilbert) p132

Thm (34) : soit $u \in H^1(]0,1[)$, alors $u \in H_0^1(]0,1[)$ ssi $u = 0$ sur $\partial I = \{0\} \cup \{1\}$. p133

application (35) : soit $f \in \mathbb{L}^2(]0,1[)$, alors le problème avec condition de Dirichlet : $\begin{cases} -u'' + u = f & \text{sur } I =]0,1[\\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$
admet une unique solution faible $u \in H_0^1(]0,1[)$ i.e vérifiant $\int_I u'v' + \int_I uv = \int fv \quad \forall v \in H_0^1(]0,1[)$ p135-6

Références :

[BECK] : Beck, Objectif agrégation (partie IV)

[BREZIS] : Brezis (Analyse fonctionnelle) (partie V)

[H] : Hirsch Lacombe (Éléments d'analyse fonctionnelle) (le reste)