

GOUP73

GOUP74

GOUP75

GOUP76 Zui p508

I Approximation de Fonctions régulières

A. Approximation locale par des polynômes

Thm ①: (Formule de Taylor-Lagrange): soit $f: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ une application de classe $\mathcal{C}^n$ sur $[a,b]$ telle que $f^{(n+1)}$ existe sur $]a,b[$. Alors:

$$\exists c \in]a,b[, f(b) = f(a) + (b-a)f'(a) + \dots + \frac{(b-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) + \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c)$$

Thm ②: (Inégalité de Taylor-Lagrange): soit $F: [a,b] \rightarrow E$ (E $\mathbb{R}$ -ev normé) une application de classe $\mathcal{C}^n$ sur $[a,b]$, dérivable $(n+1)$ -fois et telle que $\forall t \in]a,b[, \|F^{(n+1)}(t)\| \leq \pi$ alors

$$\left\| F(b) - \sum_{k=0}^n \frac{(b-a)^k}{k!} F^{(k)}(a) \right\| \leq \pi \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}$$

application ③: $\forall x \geq 0, x - \frac{x^2}{2} \leq \log(1+x) \leq x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$

$$\forall x \in \mathbb{R}, 1 - \frac{x^2}{2} \leq \cos(x) \leq 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$$

Thm ④: (Formule de Taylor avec reste intégrale): si $n \in \mathbb{N}$ et $F: [a,b] \rightarrow E$ de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ alors (E Banach) alors:

$$F(b) = \sum_{k=0}^n \frac{(b-a)^k}{k!} F^{(k)}(a) + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} F^{(n+1)}(t) dt$$

B. Densité des Polynômes dans $(\mathcal{C}^0([a,b], \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$

Thm ⑤: (Weierstrass): $\forall f: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue de module de continuité $\omega(h) = \sup \{ |f(u) - f(v)|, |u-v| \leq h \}$. $\exists$ (Bilnen) une suite de fonctions polynomiales telle que:

$$\|f - B_n\|_\infty \leq C \omega\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \text{ avec } C \in \mathbb{R}$$

application ⑥: (Thm des moments): soit $f \in \mathcal{C}^0([a,b], \mathbb{R})$ tel que $\int_a^b t^n f(t) dt = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$, alors $f \equiv 0$.

Contre Exemple ⑦: toute limite uniforme de p_n sur $\mathbb{R}$ de polynômes est un polynôme.

C. Densité des polynômes dans $L^2(I)$

Def ⑧: Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. On appelle fonction poids une fonction $p: I \rightarrow \mathbb{R}$ mesurable, strictement positive et telle que:

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \int_I |x|^n p(x) dx < +\infty$$

On note $L^2(I, p)$ l'espace des fonctions de carré intégrable par la mesure de densité p par rapport à Lebesgue.

$$\langle f, g \rangle_p = \int_I f(x) \overline{g(x)} p(x) dx$$

prop ⑨: $L^2(I, p)$ est un espace de Hilbert et il contient tous les polynômes par hypothèse sur p .

Def-prop ⑩: Il existe une unique famille $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de polynômes orthogonaux unitaire telle que $\deg(P_n) = n$ on l'appelle la famille des polynômes orthogonaux associés à p .

Thm ⑪: Soit $p: I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction poids vérifiant:

$\exists \alpha > 0, \int_I e^{\alpha|x|} p(x) dx < +\infty$, alors à renormalisation près, les polynômes orthogonaux associés à p forment une base hilbertienne de $L^2(I, p)$

$$\forall f \in L^2(I, p), f = \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=0}^N \langle f, \frac{P_n}{\|P_n\|_p} \rangle \frac{P_n}{\|P_n\|_p}$$

Ex ⑫: si $I = \mathbb{R}$ et $p(x) = e^{-x^2}$, les polynômes orthogonaux associés à p sont appelés les polynômes de Hermite. Les premiers termes sont: $P_0 = 1, P_1 = x, P_2 = x^2 - \frac{1}{2}$, $P_3 = x^3 - \frac{3}{2}x$

si $I = [-1, 1]$ et $p \equiv 1$, on retrouve les polynômes de Legendre.

BECK p 110

p 110

p 110

II. Approximation polynomiale des fonctions numériques

A. Méthode d'interpolation de Lagrange

Thm (13): Soit $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. On se donne $(n+1)$ -points $x_0, x_1, \dots, x_n$ de $[a, b]$ 2 à 2 distincts.

Alors $\exists!$ $P_n \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que $P_n(x_i) = f(x_i) \forall i$, on l'appelle polynôme interpolateur de Lagrange qui s'écrit

$$P_n = \sum_{i=0}^n f(x_i) L_i \quad \text{où } L_i = \prod_{j \neq i} \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)} \quad \forall i.$$

Thm (14): (Erreur d'approximation) On suppose f $(n+1)$ -fois dérivable, alors $\forall x \in [a, b]$, $\exists \xi_x \in]\min(x, x_0), \max(x, x_n)[$ tel que

$$f(x) - P_n(x) = \frac{\prod_{j=0}^n (x - x_j)}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi_x)$$

Rq (15): si $f \in \mathcal{C}^{n+1}([a, b])$, on a: $\|f - P_n\|_\infty \leq \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} \|f^{(n+1)}\|_\infty$ mais on ne connaît pas a priori le comportement des termes de droite.

B. Convergence de P_n vers f .

Soit $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. $\forall n \in \mathbb{N}$, on se donne une suite de $n+1$ points $x_{i,n} \ i \in \{0, n\}$ distincts. On cherche à savoir à quelles conditions $\|f - P_n\|_\infty \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.

* Cas d'une fonction analytique réelle (convergence)

Def (16): Une fonction analytique est une fonction f qui est somme d'une série entière au voisinage de tout point $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ où la série a un rayon de convergence $R > 0$.

21
Lemme (17): Soit $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ somme d'une série entière de centre $c = \frac{a+b}{2}$ et de Rayon $R > \frac{b-a}{2}$. Alors $\forall \frac{b-a}{2} < r < R$, $\exists C(r) > 0$ tq $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$\frac{1}{n!} \|f^{(n)}\|_\infty \leq \frac{C(r)}{(r - \frac{b-a}{2})^{n+1}}$$

Thm (18): Si les points $x_{i,n}$ sont répartis de manière quelconques, et si $R > \frac{3}{2}(b-a)$, alors

$$\|f - P_n\|_\infty \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

Ex (19): soit $\alpha > 0$ et $f_\alpha(x) = \frac{1}{x^2 + \alpha^2} \quad \forall x \in [-1, 1]$ notons $x_j = -1 + j \cdot \frac{1}{n}$ pour $0 \leq j \leq n$.

f est somme d'une série entière de rayon $R = \alpha$ et $\|P_n - f\|_\infty \rightarrow 0$ si $\alpha > 3$.

* Contre exemple de convergence: Phénomène de Runge

On veut de voir que la fonction f_α se comportait bien en: pour les $\alpha > 3$, que se passe-t-il pour des α petits?

On considère ici $n \in \mathbb{N}^*$ et $2n$ -points équirépartis dans $[-1, 1]$ notés $a_k = \frac{(2k+1)}{2n}$ $k \in \{0, n\}$, et P_n qui interpole f en ces a_k .

Thm (20): Si $\alpha > 0$ est suffisamment petit, la suite $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne converge pas simplement vers f_α sur $[-1, 1]$.

Rq (21): Même pour des fonctions très régulières, on a pas l'assurance d'une convergence de la suite $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

III. Approximation de fonctions périodiques

A. Polynômes trigonométriques et série de Fourier.

Def (22): on note $\mathcal{C}_{2\pi}^0 = \{f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}, f \text{ continue et } 2\pi\text{-périodique}\}$

• $\forall p \in [1, +\infty]$, on note $\mathcal{L}_{2\pi}^p = \{f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} \text{ mesurables, } 2\pi\text{-périodiques}$

• $\|f\|_p < +\infty\}$
 où $\|f\|_p = \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(t)|^p dt \right)^{1/p}$ si $p \neq +\infty$ et $\|f\|_\infty = \sup |f(t)|$.

• Les espaces $\mathcal{L}_{2\pi}^p$ sont munis du produit scalaire :

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \overline{g(t)} dt$$

• $\forall n \in \mathbb{Z}$, on note $e_n: t \in \mathbb{R} \mapsto e^{int} \in \mathbb{C}$.

L'espace $\mathcal{D}$ engendré par les e_n est l'ensemble des polynômes trigonométriques.

• $\forall f \in \mathcal{L}_{2\pi}^1(\mathbb{R})$, $\forall n \in \mathbb{Z}$, on note $c_n(f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-int} dt$

le n -ième coefficient de Fourier de f . $= \langle f, e_n \rangle$

• La somme partielle de Fourier d'indice N est

$$S_N(f) = \sum_{n=-N}^N c_n(f) e_n.$$

prop (23): $\{e_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ est un système orthonormal de $\mathcal{L}^2$

prop (24): $f \in \mathcal{L}_{2\pi}^p$ ($p \in [1, +\infty[$), notant $\tau_a f(t) = f(t+a)$

on a: $\lim_{a \rightarrow 0} \|\tau_a f - f\|_p = 0$.

Def-prop (25): Le noyau de Dirichlet d'ordre $N \geq 0$ est $D_N = \sum_{n=-N}^N e_n$

• $\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_N(t) dt = 1$

$$D_N(x) = \frac{\sin\left((N+\frac{1}{2})x\right)}{\sin \frac{x}{2}}$$

• $S_N(f) = f * D_N \quad \forall f \in \mathcal{L}^1, N \geq 0$

Def-prop (26): Le noyau de Fejér d'ordre N est $K_N = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} D_k$

• $K_N(x) = \frac{1}{N} \cdot \left(\frac{\sin(N\frac{x}{2})}{\sin \frac{x}{2}} \right)^2 \geq 0$ • $\forall 0 < \delta < \pi$

• $\lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{\delta < |x| < \pi} K_N(x) dx = 0$

• $\|K_N\|_{\mathcal{L}^1} = 1$

• $\forall f \in \mathcal{L}_{2\pi}^1, \quad \sigma_N(f) = \sum_{k=0}^{N-1} S_k f = K_N * f \in \mathcal{D}$

B. Théorèmes de convergence et applications

prop (27): Il existe $f \in \mathcal{C}_{2\pi}^0$ telle que $\sup_{N \geq 1} |S_N(f, 0)| = +\infty$
 en particulier, $S_N(f)$ diverge en 0.

Thm (28): (Fejér): (i) soit $f \in \mathcal{C}_{2\pi}^0$ alors $\|S_N(f)\|_\infty \leq \|f\|_\infty$
 et $\lim_{N \rightarrow +\infty} \|S_N(f) - f\|_\infty = 0$

(ii) soit $f \in \mathcal{L}_{2\pi}^p$ ($1 \leq p < +\infty$), alors $\|S_N(f)\|_p \leq \|f\|_p \quad \forall N \geq 1$
 et $\lim_{N \rightarrow +\infty} \|S_N(f) - f\|_p = 0$

application (29): soit $f \in \mathcal{C}_{2\pi}^0, x_0 \in \mathbb{R}$. si $S_N(f)(x_0) \rightarrow P$, alors $P = f(x_0)$.

application (30): $\{e_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ est une base hilbertienne de $\mathcal{L}_{2\pi}^2$
 (en particulier, $\|S_N(f) - f\|_2 \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 0$)

application (31): soit $f \in \mathcal{C}_{2\pi}^0$ $\mathcal{C}^1$ par morceaux alors
 $\|S_N(f) - f\|_\infty \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 0$

application (32): si $f, g \in \mathcal{L}_{2\pi}^1$ tq $c_n(f) = c_n(g) \quad \forall n \in \mathbb{Z}$, alors $f = g$ pp

Thm (33): (Dirichlet): soit $f \in \mathcal{L}_{2\pi}^1$ telle que $\lim_{t \rightarrow x_0^+} f(t) = f^+$
 $\lim_{t \rightarrow x_0^-} f(t) = f^-$ existent et si $\exists \delta > 0$ tq
 $\int_0^\delta \frac{|f(x_0+t) - f^+|}{t} dt$ et $\int_0^\delta \frac{|f(x_0-t) - f^-|}{t} dt < +\infty$ alors
 $\lim_{N \rightarrow +\infty} S_N(f, x_0) = \frac{1}{2}(f^+ + f^-)$

Zuip 75

Zuip 79

Zuip 84

Zuip 83

Zuip 86

Ref: - [BECK]: Objectif Agrégation (Beck) (I.C)

- [GOU]: Gordon Analyse (I.A)

- [DEN]: Demailly (Analyse numérique et équ. diff) (II.)

- [ZUI]: Zuij - Queffelec (Éléments d'analyse 2ème édition) (III) + (I.B)