208 — Espaces vectoriels normés. Applications linéaires continues. Exemples

Cadre : $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et E est un $\mathbb{K}$-ev.

I. Définitions et exemples

(G) p9

Def ① : Une norme sur E est une application $\|.\| : E \to \mathbb{R}_+$ telle que
(i) $\|x\| = 0 \iff x = 0$
(ii) $\forall \lambda \in \mathbb{K}$, $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$
(iii) $\forall (x,y) \in E^2$ $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Dans ce cas, E est un espace vectoriel normé (e.v.n)

Ex ② : • $x \mapsto |x|$ sur $\mathbb{K}$.
• dans $\mathbb{R}^n$: $\|x\|_1 = \sum_i |x_i|$, $\|x\|_2 = \left(\sum_i |x_i|^2\right)^{1/2}$, $\|x\|_p = \left(\sum |x_i|^p\right)^{1/p}$
• si X ensemble, $\mathcal{B}(X,E)$ l'ensemble des applications bornées de X dans E e.v.n muni de $\|f\|_\infty = \sup_{x \in X} \|f(x)\|_E$

Rq ③ $d : E \times E \to \mathbb{R}_+$, $(x,y) \mapsto \|x-y\|$ est une distance sur E.

p47

Def ④ : Deux normes $\|.\|_1$ et $\|.\|_2$ sur E sont équivalentes si $\exists a,b > 0$, $\forall x \in E$ $a\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq b\|x\|_1$
elles définissent alors la même topologie sur E.

Ex ⑤ : sur $\mathbb{K}^n$, $\|x\|_\infty = \sup_i |x_i| \leq \|x\|_p \leq n^{1/p} \|x\|_\infty$ pour $p \geq 1$.

II. Applications linéaires continues

$(E, \|.\|_E)$ et $(F, \|.\|_F)$ sont des $\mathbb{K}$-evn.

Thm ⑥ : soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$ ensemble des application linéaire de E dans F. on a équivalence entre :
(i) f est continue sur E
(ii) f est continue en 0
(iii) f est bornée sur $\overline{B}(0,1) \subset E$
(iv) f est bornée sur $S(0,1) \subset E$
(v) $\exists \Pi > 0$ tel que $\|f(x)\|_F \leq \Pi \|x\|_E$ $\forall x \in E$
(vi) f est lipschitzienne sur E.

Def-prop ⑦ : on note $\mathcal{L}_c(E,F)$ l'ensemble des applications linéaires continues de E dans F, qu'on munit de la norme subordonnée $|||f||| = \sup_{\|x\|=1} \|f(x)\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|f(x)\|$.
$\mathcal{L}_c(E,F)$ est donc un e.v.n

prop ⑧ : E, F, G evn, $f \in \mathcal{L}_c(E,F)$ $g \in \mathcal{L}_c(F,G)$ alors $g \circ f \in \mathcal{L}_c(E,G)$ et $|||g \circ f||| \leq |||g|||\,|||f|||$.

III. Cas de la dimension finie

prop ⑨ : si $a < b \in \mathbb{R}$, le segment $[a,b]$ est compact dans $\mathbb{R}$, et les parties compactes de $(\mathbb{K}^n, \|.\|_\infty)$ sont les fermés bornés.

(P) p51

Thm ⑩ : Dans un e.v.n de dimension finie, toutes les normes sont équivalentes.

(G) p50

C-Ex ⑪ : dans $E = \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$, $\|f\|_\infty = \sup_{t \in [0,1]} |f(t)|$ et $\|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)|dt$ ne sont pas équivalentes
(considérer $f_n(t) = (n - n^2 t) \mathbb{1}_{[0, \frac{1}{n}]}$)

(HA) p321

Cor ⑪ (i) tout application linéaire d'un e.v.n de dim finie E dans un e.v.n F est continue
(ii) Tout e.v.n de dim finie est complet
(iii) Les parties compactes d'un e.v.n de dim finie sont les fermés bornés.

(G) p50

C-Ex ⑫ : $E = (\mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R}), \|.\|_1)$ et $u : E \to \mathbb{R}$, $f \mapsto f(0)$ est une forme linéaire sur E, mais $g_n = \frac{1}{n} f_n$ (f_n comme en ⑪) vérifie $u(g_n) = 1$ et $\|g_n\|_1 = \frac{1}{2n}$, d'où $(g_n)_n \to 0$ dans E mais $(u(g_n))_n \not\to u(0) = 0$

(HA) p321

(ii) E n'est pas complet.

(iii) Dans $\mathbb{R}[X]$, muni de $\|P\| = \max_{0 \leq k \leq \deg(P)} |a_k|$. $B = \{P \in E, \|P\| \leq 1\}$ qui est fermé, borné dans $\mathbb{R}[X]$, mais pas compact.

[G] p.56

Thm 13 (Riesz) E est de dimension finie SSI $\overline{B_E}(0,1)$ compact

IV. Cas particulier des matrices $n \in \mathbb{N}^*$.

[A] p.52

Def 14 : Soit $\|.\|$ une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, c'est une norme matricielle si $\forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\|AB\| \leq \|A\|\|B\|$

Ex 15 : • $\|A\|_F = \left(\sum_{i,j} |a_{i,j}|^2\right)^{1/2}$

• $\|A\| = \max_{i,j} |a_{ij}|$ n'est pas matricielle.

Def 16 : soit $\|.\|$ une norme sur $\mathbb{K}^n$, la norme subordonnée associée est matricielle.

prop 17 : $\|A\|_1$ subordonné à $\|.\|_1$ sur $\mathbb{K}^n$ vérifie $\|A\|_1 = \max_j \sum_{i=1}^n |a_{ij}|$

$\|A\|_\infty$ subordonnée à $\|.\|_\infty$ sur $\mathbb{K}^n$ vérifie $\|A\|_\infty = \max_i \sum_{j=1}^n |a_{ij}|$.

$\|A\|_2 = \rho(AA^*)^{1/2}$ où $A^* = {}^t\bar{A}$ et $\rho(A) = \max_{\lambda \text{ v.p de } A} |\lambda|$.

prop 18 : • Soit $\|.\|$ norme matricielle sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, alors $\rho(A) \leq \|A\|$

• $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \|.\|_A$ subordonnée tq $\|A\| \leq \rho(A) + \varepsilon$

prop 19 : $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on a équivalence entre :

(i) $\lim_{i \to +\infty} A^i = 0$ (iii) $\rho(A) < 1$

(ii) $\lim_{i \to +\infty} A^i x = 0 \quad \forall x \in \mathbb{C}^n$ (iv) $\exists \|.\|$ matricielle tq $\|A\| < 1$

Def 20 : soit $A \in GL_n(\mathbb{C})$, le but est de résoudre le système $Ax = b$ de manière approchée. On appelle décomposition régulière de A un couple (M, N) avec $M \in GL_n(\mathbb{C})$ (facile à inverser dans la pratique) telque $A = M - N$.
Une méthode itérative associée est définie par :

$$\begin{cases} x_0 \in \mathbb{R}^n \\ M x_{k+1} = N x_k + b \quad \forall k \geq 1 \end{cases} \quad *$$

En particulier si $x_k \to x$ on a $Ax = b$

• on dit que la méthode converge si $\forall x_0 \in \mathbb{R}^n$ $x_k \to x$.

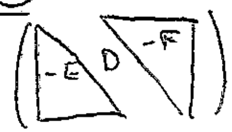
Thm 21 La méthode itérative $*$ converge SSI $\rho(M^{-1}N) < 1$

application 22 : si A est symétrique def positive de décomposition régulière $A = M - N$ et si ${}^tM + N$ est définie positive, alors la méthode $*$ converge.

p.59

Ex 23 : (Jacobi) : on prend $M = D = \mathrm{diag}(a_{11} \dots a_{nn})$ $N = D - A$. On suppose $D \in GL_n(\mathbb{C})$.
si $A \in S_n(\mathbb{R})$, la méthode converge lorsque $2D - A$ et A sont def positives.

Ex 24 : (Gauss-Seidel) on prend : $D - E - F$:

$A =$ 

, $M = D - E$, $N = F$.

Si $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$, alors ${}^tM + N = D \in S_n^{++}(\mathbb{R})$, la méthode converge.

V. Espaces de Banach.

[G] p.59

Def 25 : Un espace de Banach est un e.v.n complet

Ex 26 : • un e.v.n de dim finie est complet

• si F est un Banach, $\mathcal{L}_c(E,F)$ est un Banach

• $(\mathcal{C}^0([0,1]), \|.\|_\infty)$ est un Banach

BRIANE

Thm 27 : soit E un evn. Alors E est un Banach ssi toute série absolument convergente est convergente.

app 28 (Riesz-Fisher) : $\mathbb{L}^p$ est complet pour $1 \leq p < +\infty$

Rq 29 : sur $\mathbb{L}^2$, $\|.\|_2$ provient d'un produit scalaire :

$$\langle f, g \rangle = \int_X f \bar{g} \, d\mu$$

[H]

VI. Espaces de Hilbert

H = Hilbert

Def 30 : Un espace vectoriel E sur $\mathbb{K}$ est dit préhilbertien s'il est muni d'un produit scalaire $\langle . | . \rangle$. On a alors $\forall x, y \in E$ $|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|$ où $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ est une norme sur E.
E est un espace de Hilbert s'il est complet pour cette norme

Ex 31 $\mathbb{L}^2(X, \mathcal{A}, \mu)$ est un Hilbert

- $\ell^2(\mathbb{N}) = \{ (x_i)_{i \in \mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}, \sum_{i \in \mathbb{N}} |x_i|^2 < +\infty \}$ aussi.

Thm 32 : Soit $\mathcal{C}$ un convexe fermé de H espace de Hilbert,
Alors $\forall x \in E$, $\exists ! y \in \mathcal{C}$ tel que $\|x - y\| = d(x, \mathcal{C})$.
on note $y = p_{\mathcal{C}}(x)$. + caracté
si $\mathcal{C}$ est un s.e.v fermé de H, alors $x \mapsto p_{\mathcal{C}}(x)$ est une application linéaire continue, de norme 1.

app 33 (Riesz) soit $\phi \in \mathcal{L}(H, \mathbb{K})$, $\exists ! x \in H$ tq
$\phi(y) = \langle x, y \rangle$ $\forall y \in H$ et $|||\phi||| = \|x\|_H$.

en plus :
- point fixe de Banach
- prolongement
- bases hilbertiennes.

$\boxed{\text{- Espace de Sobolev}}$ voir 213

Références :

[A] : Allaire - Kaber (Alg lin num) (IV)
[G] : Gourdon (Analyse) (I, II, III)
[H] : Hirsch - Lacombe (VI)
[HA] : Hauchecorne (contre ex)