207 Prolongement de fonctions. Exemples et applications

Def ① : Soit E et F des ensembles et $A \subset B \subset E$. On dit qu'une application $g : B \to F$ est un prolongement de $f : A \to F$ si $f(x) = g(x)\ \forall x \in A$.

I. Prolongement et continuité

1) par continuité

GOU p16

Def ② : soit $f : D \setminus \{a\} \subset (E,d) \to (F,d')$ une application continue. On suppose que a est un point d'accumulation de D et que $\lim_{x \to a} f(x) = l$. La fonction g définie par $g(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in D \setminus \{a\} \\ l & \text{si } x = a \end{cases}$ est continue et est appelé prolongement par continuité de f en a.

Ex ③ : soit $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{\sin(x)}{x}$. Alors f se prolonge par continuité en 0 avec $g(0) = 1$.

2) Par densité

prop ④ : Soient f, g deux fonctions continues de (E,d) dans (F,d'). Si f et g coïncident sur une partie dense, alors f et g sont égales.

FGN p137 TIAD p46

app ⑤ : si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue et vérifie $\forall x, y \in \mathbb{R}$ $f(x+y) = f(x) + f(y)$ alors f est linéaire.

Thm ⑥ : soit E et F deux espaces vectoriels normés, A une partie de E qui est dense et $f : A \to F$ uniformément continue, avec F complet. Alors f admet un unique prolongement continu $\tilde{f}$ continue sur E. (m̂ uniformément)

FGN p19

app ⑦ : Soit $N : \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{N}$ une application vérifiant les trois axiomes d'une norme, alors N se prolonge de façon unique en une norme sur $\mathbb{R}^2$

Cor ⑧ : si E et F sont des evn avec F complet, $A \subset X$ un sev dense de X, alors si $f : A \to Y$ linéaire continue, il existe un unique prolongement $\tilde{f} : X \to Y$ continue, linéaire avec $\|\tilde{f}\| = \|f\|$.

app ⑨ : l'opérateur $\mathcal{F} : L^1 \cap L^2 \to (\mathcal{C}^0, \|.\|_\infty)$, $f \mapsto \hat{f}$ se prolonge sur L^2, avec $\|\mathcal{F}\| \leq 1$.

3) Hahn - Banach

TIAD p44

Thm ⑩ : soit E un $\mathbb{R}$-evn de dimension n, F un sev de E, et u une forme linéaire sur F ; alors il existe $\tilde{u} : E \to \mathbb{R}$ une forme linéaire qui prolonge u et qui est de même norme.

app ⑪ : soit F un sev de l'evn E. Alors F est dense dans E SSI toute forme linéaire continue qui s'annule sur F, s'annule sur E.

II. Prolongement et dérivabilité

GOU p73

Thm ⑫ : Soit $F : [a,b[\to E$ une application continue, dérivable sur $]a,b[$ et telle que $\lim_{x \to a^+} F'(x) = l$. Alors F est dérivable en a et $F'(a) = l$.

GOU p 75

app 13 : soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tq $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ e^{-\frac{1}{x}} & \text{si } x > 0 \end{cases}$

alors f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$

Thm 14 : soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^k$ $(k \geq 1)$ telle que $f(0) = 0$, alors $g : x \mapsto \frac{f(x)}{x}$ se prolonge en une fonction de classe $\mathcal{C}^{k-1}$ sur $\mathbb{R}$

Nou p 115

Ex 15 : la fonction $x \mapsto \frac{\sin(x)}{x}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$

ZQ p 346

Def 16 : Soient I intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \times \Omega \to \mathbb{R}^n$ continue, on s'intéresse à l'équation différentielle $x'(t) = f(t, x(t))$ où x est $\mathcal{C}^1$. Une solution $x : J \to \mathbb{R}^n$ est dite maximale si elle n'admet aucun prolongement, elle est globale si $J = I$.

Thm 17 : On suppose f localement lipschitzienne par rapport à la variable d'espace (ce qui assure l'existence et l'unicité d'une solution maximale au problème $\begin{cases} x' = f(t, x) \\ x(t_0) = x_0 \in \Omega \end{cases}$ où $x : J \to \mathbb{R}^n$.)

p 364

si $f :]a, b[\times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ et si $x : J \to \mathbb{R}^n$ est une solution maximale, où $J =]T_*, T^*[$. Alors

$\begin{cases} \text{ou } T^* = b \quad \text{ou bien } T^* < b \text{ et } \lim\limits_{t \to T^*} \|x(t)\| = +\infty \\ \text{ou bien } T_* = a, \text{ ou bien } T_* > a \text{ et } \lim\limits_{t \to T_*} \|x(t)\| = +\infty \end{cases}$

coro 18 : Soit $x : J \to \mathbb{R}^n$ solution où $J =]\alpha, \beta[$ avec $a < \alpha < \beta < b$. On suppose que x est bornée au voisinage de α et de β, alors x peut être prolongée au delà de β (et α) en une solution.

p 366

Ex 19 : Le problème $\begin{cases} x'(t) = \frac{x^2(t)}{1 + x^2(t)} \\ x(0) = x_0 \end{cases}$ définit sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ admet pour tout $x_0 \in \mathbb{R}$ une unique solut° définie sur tout $\mathbb{R}$

III Prolongement et Holomorphie

TAU p 46

Thm 20 (Prolongement analytique) : soit f une fonction holomorphe sur un ouvert connexe U, non identiquement nulle, alors les zéros de f sont isolés.

p 45

Ex 21 : $\forall z \in \mathbb{C}$, la fonction définie par $\exp(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ est holomorphe sur $\mathbb{C}$, et elle prolonge la fonction exponentielle réelle (bijection réciproque du log)

p 46

app 22 : on définit $\cos(z) = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$ et $\sin(z) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2}$ alors $\forall z \in \mathbb{C}$, $\cos^2(z) + \sin^2(z) = 1$.

Def 23 : $\forall z \in \{w \in \mathbb{C}, \operatorname{Re}(w) > 0\}$, on pose $\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} t^{z-1} e^{-t} \, dt$. appelée fonction Gamma

[Q] p 234

Thm 24 : (Formule des compléments) $\forall \alpha \in]0, 1[$, on a $\Gamma(\alpha)\Gamma(1 - \alpha) = \frac{\pi}{\sin(\pi \alpha)}$

Coro 25 : La fonction Γ se prolonge en une fonction holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}_-$.

[BECK]

IV. Application : Polynômes orthogonaux

Def 26 : Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, on appelle fonction poids une fonction $p : I \to \mathbb{R}$ mesurable, strictement positive et telle que $\forall n \in \mathbb{N}$ $\int_I |x|^n p(x)\,dx < +\infty$

- On note $L^2(I,p)$ l'espace des fonctions de carré intégrable pour la mesure de densité p muni du produit scalaire $\langle f, g\rangle_p = \int_I f(x)\overline{g(x)}\,p(x)\,dx$

$L^2(I,p)$ est alors un espace de Hilbert.

Def-prop 27 : Il existe une unique famille $(P_n)_n$ de polynômes unitaires, orthogonaux deux à deux tels que $\deg(P_n) = n$. On l'appelle famille des polynômes orthogonaux.

Thm 28 : Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et p une fonction poids. On suppose que si I est non borné, $\exists\, \alpha > 0$ tel que $\int_I e^{\alpha|x|} p(x)\,dx < +\infty$ alors les polynômes orthogonaux associés à p forment une base hilbertienne de $L^2(I,p)$ (à renormalisation près)

Ex 29 : Soit $I = \mathbb{R}$ et $p(x) = e^{-x^2}$, on obtient les polynômes de Hermite

$P_0 = 1 \quad P_1 = X \quad P_2 = X^2 - \frac{1}{2} \quad P_3 = X^3 - \frac{3}{2}X$

Ex 30 : si $I = [-1, 1]$, $p \equiv 1$, on obtient les polynôme de Legendre :

$P_0 = 1 \quad P_1 = X \quad P_2 = X^2 - \frac{1}{3} \quad P_3 = X^3 - \frac{3}{5}X$

Références :

[BECK] : Beck, Objectif agreg (Partie IV)

[FGN] : Oraux X-ENS (Francinou) (Thm 6 .app 7

[GOU] : Gourdon (Analyse)

[MAD] : Madère (prépa à l'oral agreg)

[NOU] : Nourdin (agreg maths oral)

[ZQ] : Zuily Queffélec (Élément d'Analyse) (Equa diff)

[Q] : Queffélec (Analyse complexe) (Γ et formule : complément)