205 Espaces complets. Exemples et applications

I. Définition et premiers Exemples

On considère ici (E,d) un espace métrique.

GOU p 20

Def 1 : On dit qu'une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de E est de Cauchy si :
pour tout $\varepsilon>0$, il existe $N\in\mathbb{N}$ tel que pour tout $p,q>N$
$d(x_p,x_q)<\varepsilon$

prop 2 : (i) Une suite convergent est de Cauchy
(ii) Une suite de Cauchy est bornée.
(iii) Une suite de Cauchy converge si elle admet une valeur d'adhérence.

Def 3 : On dit qu'un espace (E,d) est complet si toute suite de Cauchy de E converge.

GOU p 22

Ex 4 :
- $(\mathbb{R},|.|)$ est complet
- $(\mathbb{Q},|.|)$ n'est pas complet
- soit X un ensemble et $\mathcal{B}(X,\mathbb{R})$ le $\mathbb{R}$-ev des fonctions bornées de X dans $\mathbb{R}$ munit de $\|f\|=\sup_{x\in X}|f(x)|$ alors $\mathcal{B}(X,\mathbb{R})$ est complet.

Rq 5 : La notion de suite de Cauchy n'est pas topologique
$]0,+\infty[$ munit de $\delta(x,y)=\left|\frac{1}{x}-\frac{1}{y}\right|$ définit la même topologie que $|x-y|$. mais $(]0,1],\delta)$ est complet alors que $(]0,1],|.|)$ ne l'est pas.

prop 6 : - Une partie complète d'un espace métrique est fermée
- Une partie fermée d'un espace complet est complète

prop 7 : Soit (E,d) un espace métrique complet et $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fermés non vide de E tq $\operatorname{diam}(F_n)\xrightarrow[n\to+\infty]{}0$. Alors $\exists x\in E$, $\bigcap_{n\in\mathbb{N}}F_n=\{x\}$

prop 8 : si $(E_i,d_i)_{i=1}^{n}$ sont complets alors $(E_1\times\dots\times E_n, d_1,\dots,d_n)$ est complet et réciproquement. GOU

prop 9 : soit (E,d) un espace métrique. Il est compact si et seulement si il est précompact et complet. p 31

II. Espaces de Banach

Def 10 : Un espace vectoriel normé complet est appelé un Banach.

A. Applications linéaires continues.

Def 11 : soit $(E,\|.\|)$ et $(F,\|.\|)$ deux $\mathbb{K}$-evn, on note $\mathcal{L}_c(E,F)$ l'ensemble des applications linéaires continues de E dans F que l'on munit de la norme subordonnée :
$\forall f\in\mathcal{L}_c(E,F)$, $|||f|||=\sup_{\|x\|\le1}\|f(x)\|$.

GOU p 48

prop 12 : $\mathcal{L}_c(E,F)$ est un evn, et si F est complet, alors c'est un Banach.

B - Espace $\mathbb{L}^p$

On considère ici $(\Omega,\mathcal{A},\mu)$ un espace mesuré

Def 13 : soit $p\in\mathbb{R}$ $1\le p<+\infty$. On pose
$\mathcal{L}^p(\Omega)=\{f:\Omega\to\mathbb{R},\ f\text{ mesurable et }\int_\Omega|f(x)|^p d\mu(x)<\infty\}$
et on note $\mathbb{L}^p(\Omega)$ l'ensemble $\mathcal{L}^p(\Omega)$ quotienté par la relation d'équivalence presque partout.
on définit alors $\forall f\in\mathbb{L}^p(\Omega)$, $\|f\|_p=\left(\int_\Omega|f(x)|^p d\mu(x)\right)^{1/p}$

BRI p 143 + p 153

Thm : (i) $(\mathbb{L}^p, \|.\|_p)$ est un espace vectoriel normé
(ii) $\forall p \in [1, +\infty]$, c'est un espace de Banach

Thm (14) : soit $(E, \|.\|)$ un e.v.n. Alors E est un Banach si et seulement si toute série normalement convergente est convergente.

Thm (15) : (Minkovski Généralisée) : soit $f_n : (\Omega, \mathcal{A}) \to \overline{\mathbb{R}}_+$ une suite de fonctions positives. Alors $\forall p \in [1, +\infty[$
$$\|\sum_{n \geq 1} f_n\|_p \leq \sum_{n \geq 1} \|f_n\|_p .$$

C. Espace de Hilbert.

BRE p 78

Def 16 : Un espace de Hilbert est un espace vectoriel munit d'un produit scalaire qui est complet pour la norme associée.

Ex 17 : $\mathbb{L}^2(\Omega)$ munit de $\langle f, g\rangle = \int_\Omega f(x) g(x) d\mu(x)$ est un espace de Hilbert.

HIR p 91

Thm 18 (Projection sur un convexe fermé) : Soit $\mathcal{C}$ une partie fermée, convexe et non vide de E, alors pour tout $x \in E$, il existe $y \in \mathcal{C}$ tel que
$$\|x - y\| = d(x, \mathcal{C}).$$
ce point y est unique et est noté $p_\mathcal{C}(x)$, il est caractérisé par :
$$y \in \mathcal{C} \text{ et } \forall z \in \mathcal{C} \quad Re(\langle x - y | z - y\rangle) \leq 0$$

coro 19 :
- Si F est un sev fermé de H, alors $H = F \oplus F^\perp$
- si F est un sev, alors F est dense dans H SSI $F^\perp = \{0\}$

application 20 : Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité et $\mathcal{B} \in \mathcal{A}$ sous-tribu. Alors $\forall X \in \mathbb{L}^2(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, on appelle espérance conditionnelle de X sachant $\mathcal{B}$ la projection orthogonale de X sur $\mathbb{L}^2(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P})$. Elle est notée $E[X|\mathcal{B}]$.

Def 21 : On note H' l'ensemble des formes linéaires continues de H.

GOU p 402

Thm 22 : (Représentation de Riesz). L'application
$$\begin{aligned} \varphi : H &\longrightarrow H' \\ a &\longmapsto \varphi_a : x \mapsto \langle a, x\rangle \end{aligned}$$
est un isomorphisme.

application 23 : soit $u \in \mathcal{L}_c(H)$ un endomorphisme continu de H. il existe un unique endomorphisme noté u^* tel que $\forall x, y \in H$
$$\langle u(x), y\rangle = \langle x, u^*(y)\rangle$$
et de plus, $|||u^*||| = |||u|||$.

III. Théorème fondamentaux sur les espaces complets

A. Théorème de point fixe

GOU p 21

Thm 24 (du point fixe) : Soit (E, d) un espace métrique complet et f une application telle que $f : E \to E$ et $\exists k \in]0, 1[$,
$$\forall (x, y) \in E^2, \quad d(f(x), f(y)) \leq k\, d(x, y) \; *$$
alors f admet un unique point fixe.

Coro 25 : si (E, d) complet et f admet une itérée vérifiant $*$, alors f admet unique point fixe

<u>application 26 :</u> On utilise le théorème du point fixe dans la démonstration du théorème de Cauchy-Lipschitz, dans le théorème d'inversion local.

<u>Rq 27 :</u> si $k = 1$ dans le théorème, celui-ci ne s'applique plus comme le montre la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \sqrt{x^2+1}$

B. Théorème de prolongement.

GOU p 24

<u>Thm 28 :</u> soit E et F des espaces métriques et A une partie dense de E.

(i) si $f : A \to F$ est continue et si $\forall x \in E \setminus A$ $\lim_{\substack{y \to x \\ y \in A}} f(y)$ existe, alors il existe une unique fonction $g : E \to F$ continue telle que $g_{|A} = f$

(ii) si F est supposé complet et $f : A \to F$ uniformément continue alors $\exists\, g : E \to F$ uniformément continue qui prolonge f.

<u>Ex 29 :</u> L'unique application uniformément continue sur $\mathbb{R}$ et qui soit l'identité sur $\mathbb{Q}$ est l'identité.

<u>Cor 30 :</u> si E evn et F Banach et si $A \subset E$ est une partie dense. Soit alors $f : A \to F$ linéaire continue. Il existe $g : E \to F$ continue $\underset{\text{linéaire}}{\wedge}$ telle que $g_{|A} = f$.

C- Théorème de Baire

GOU p 391

<u>Thm 31 :</u> soit (E,d) un espace métrique complet.
- Soit $(O_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'ouverts denses dans E alors $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} O_n$ est encore dense dans E.
- soit $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fermés d'intérieur vide de E, alors $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n$ est d'intérieur vide.

<u>application 32 :</u> $\mathbb{R}[X]$ n'est complet pour aucune norme

p 393

<u>Thm 32 :</u> (Banach Steinhaus) soit E Banach et F evn et $H \subset \mathcal{L}_c(E,F)$ alors :
- ou bien $(|||f|||)_{f \in H}$ est borné
- ou bien il existe $x \in E$, $\sup_{f \in H} \|f(x)\| = +\infty$

GOU p 398

<u>application 33 :</u> Il existe des fonctions continues périodiques différente de leur série de Fourier.

<u>exemple 34 :</u> soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 2π-périodique telle que (f est continue) $\forall x \in [0,\pi]$, $f(x) = \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{p^2} \sin\left((2^{p^3}+1)\frac{x}{2}\right)$

GOU p 262

la série de Fourier de f diverge en 0.

Références :

[GOU] : Gourdon, Analyse

[HIR] : Hirsch, Lacombe (Elément d'analyse fonctionnelle)

[BRE] : Brezis (Analyse fonctionnelle)

[BRI] : Briane et Pagès (Théorie de l'intégration.

DEV ① : Théorème de Riesz-Fisher $1 \leq p < +\infty$ [18]

DEV ② : Projection sur un convexe fermé [14][15]