Utilisation de la notion de compacité. 203

Dans cette leçon (X,d) désigne un espace métrique

I. Définitions et premières propriétés

(G) p27 **Def ①** : Un espace (X,d) est dit compact si de tout recouvrement de X par des ouverts, on peut extraire un sous-recouvrement fini. (propriété de Borel-Lebesgue B-L).

p30 **App ②** : Soit $(x_n)_n$ une sui convergente de (X,d) et l sa limite. Alors $\Gamma = \{x_n, n\in\mathbb{N}\}\cup\{l\}$ est compact

p27 **Ex ③** : • Tout espace métrique fini est compact.
• $\mathbb{R}$ n'est pas compact car $\mathbb{R} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*}]-n,n[$.

prop ④ : Un compact est borné

p28 **prop ⑤** : (X,d) est compact SSI de toute intersection vide de fermé de E, on peut extraire une sous famille finie d'intersection vide.

coro ⑥ : si $(F_n)_n$ est une suite décroissante de fermés non vides dans E compact, alors $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n \neq \emptyset$

Ex ⑦ : • Une réunion finie de compacts est compacte
• Une intersection de compacts est compacte.

Thm ⑧ : (Bolzano-Weierstrass). Un espace (X,d) est compact SSI de toute suite de (E,d), on peut extraire une sous-suite convergente.

prop ⑨ : (i) si X est compact et si $A\subset X$ est fermé alors A est compact. p30
(ii) Un compact de E est fermé, borné.
(iii) Un espace compact est complet
(iv) si (X,d) est compact, et $(x_n)_n \in X^{\mathbb{N}}$, alors $(x_n)_n$ converge SSI $(x_n)_n$ admet une unique valeur d'adhérence
→ app ⑩ : valeur adhérence connexe (Queff Topo p134) DEV

Thm ⑩ (Théorème de Riesz). Soit $(E,\|.\|)$ un espace vectoriel normé. Alors E est de dimension finie SSI $S_E = \{x, \|x\|=1\}$ est compact FGN p65

Thm ⑪ : si $(E,\|.\|)$ est un e.v.n de dimension finie, alors les compacts de E sont les fermés bornés p30

prop ⑫ : Un espace précompact et complet est compact p32

Thm ⑬ (Tychonoff). Soit $(X_n)_n$ une suite d'espaces métriques compacts, et $X = \prod_{i\in\mathbb{N}} X_i$. alors X est compact pour la distance : $d(x,y) = \sum_{n\in\mathbb{N}^*} 2^{-n} d_n(x_n,y_n)$. (Q) p84

app ⑭ : Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions croissantes de I dans $\mathbb{R}$, où I intervalle de $\mathbb{R}$. On suppose que $\forall x\in I$, $(f_n(x))_n$ est bornée, alors il existe une sous suite $(f_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ et une fonction croissante $f: I\to\mathbb{R}$ tq $f_{\varphi(n)}(x)\to f(x)$ $\forall x\in I$ (G) p235

II. Compacts et continuité

p 31 **prop 15** : l'image d'un compact par une application continue est compact

app 16 : si $f : E \to F$ est continue et que E est compact, f bijective, alors f^{-1} est continue

app 17 : une application continue sur un compact y est bornée et atteind ses bornes.

p 72 **app 18** (Théorème de Rolle) : Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue dérivable sur $]a,b[$ et telle que $f(a) = f(b)$, alors $\exists c \in]a,b[$ tel que $f'(c) = 0$.

Thm 19 (Heine) Soient (E,d) et (F,δ) deux espaces métriques et $f : E \to F$ continue avec E compact, alors f est uniformément continue.

Thm 20 (Dini) soit $a < b \in \mathbb{R}$ et $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ une suite de fonctions continues, convergeant simplement vers f continue.

FGN p 156 Si la suite $(f_n)_n$ est croissante ($f_n \leq f_{n+1}$), la convergence est uniforme.

app 21 : On considère la suite de fonction $(p_n)_n$ de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ définie par : $\begin{cases} p_0 = 0 \\ p_{n+1}(x) = p_n(x) + \frac{1}{2}\left(x - p_n^2(x)\right) \forall n \geq 0 \end{cases}$

alors $(p_n)_n$ converge uniformément vers $x \mapsto \sqrt{x}$ sur $[0,1]$

Z p 508 **Thm 22** (Bernstein) soit $f : [0,1] \to \mathbb{C}$ continue, on note $B_n f : x \in [0,1] \longmapsto \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} f(\frac{k}{n})$. Alors $B_n f \xrightarrow[n\to\infty]{} f$ uniformément

app 23 : si $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ est continue et vérifie $\int f(x) x^n dx = 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$, alors $f \equiv 0$ sur $[0,1]$

Thm 24 : soit (E,d) espace métrique compact et $f : E \to E$ une application vérifiant : $\forall (x,y) \in E^2$ $x \neq y$, $d(f(x), f(y)) < d(x,y)$, alors f admet un unique point fixe α. De plus $\alpha = \lim_{n\to+\infty} f^n(x_0)$ où $x_0 \in E$. p 34

C-Ex 25 : Le résultat est faux si E est seulement complet : $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x < 0 \\ \frac{1}{1+x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$ p 35

III. Le théorème d'Ascoli

on note $\mathcal{C}(X)$ l'espace des fonctions continues de X dans $\mathbb{C}$

Def 26 : une partie $Y \subset X$ d'un espace métrique est relativement compact dans X si $\exists K$ compact tel que $Y \subset K$ (ie si $\overline{Y}$ est compact). [H] p 11

Def 27 : Une partie H de $\mathcal{C}^0(X)$ est dit équicontinue en un point x_0 de X si

$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in X.\ d(x, x_0) < \eta \Rightarrow \forall h \in H\ |h(x) - h(x_0)| < \varepsilon$ p 37

on dit qu'elle est équicontinue si elle est en tout point de X, et qu'elle est uniformément équicontinue si $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x, y \in X,\ d(x,y) < \eta \Rightarrow \forall h \in H\ |h(x) - h(y)| < \varepsilon$ p 38

prop 28 : une partie équicontinue de $\mathcal{C}(X)$ est uniformément équicontinue.

Ex 29 : . Une partie finie de $\mathcal{C}(X)$ est équicontinue
. si $C>0$, l'ensemble des fonctions C-lipschitziennes est équicontinu.
. Une suite de fonctions de $\mathcal{C}^0(X)$ qui converge uniformément est équicontinue.

prop 30 Soient (f_n) une suite équicontinue de $\mathcal{C}(X)$ et D une partie dense de X. Si $(f_n(x))$ converge pour tout x, alors $(f_n)_n$ converge uniformément dans $\mathcal{C}^0(X)$.

Thm 31 (Ascoli) Une partie de $\mathcal{C}^0(X)$ est relativement compacte dans $\mathcal{C}^0(X)$ SSI elle est bornée et équicontinue.

p 39

app 32 : Soient X et Y des espaces métriques compacts et $K \in \mathcal{C}^0(X\times Y)$, μ une mesure borélienne sur Y de masse finie.
soit $T : \mathcal{C}^0(Y) \longrightarrow \mathcal{C}^0(X)$ un opérateur linéaire tq $\forall f \in \mathcal{C}^0(Y)$, $\forall x \in X$, $Tf(x) = \int_Y K(x,y) f(y)\, d\mu(y)$. alors $T\left(B_{\mathcal{C}^0(Y)}(0,1)\right)$ est relativement compact (on dit que T est un opérateur compact).

III. Applications

En Algèbre :

prop 33 : $O(n)$ est un compact de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ......)

Thm 34 : (Décomposition polaire) L'application
$$O(n) \times S_n^{++}(\mathbb{R}) \longrightarrow GL_n(\mathbb{R}) \quad \text{est un homéomorphisme}$$
$$(Q, S) \longmapsto QS$$
(où S_n^{++} est l'ensemble des matrices symétriques définies positives)

XH, G2 p 205

app 35 : Tout sous groupe compact de $GL_n(\mathbb{R})$ qui contient le groupe orthogonal $O(n)$ est le groupe $O(n)$ lui même.

En équation-différentielles

Def 36 : soit Ω ouvert de $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^N$, $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ continue et $y_0 \in \mathbb{R}^n$. $C = \underbrace{[t_0-\alpha_1, t_0+\alpha_1]}_{I} \times \bar{B}(y_0,r_1)$ avec $\alpha, r_1>0$ est un cylindre de sécurité si $\forall y \in \tilde{E} = \mathcal{C}^0(I, \bar{B}(y_0,r_1))$ $\phi(y) \in \tilde{E}$ où $\phi(y)(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s,y(s))ds$ $\forall t \in I$.

Lemme 37 : Soit $(t_0,y_0) \in \Omega$, il existe $\alpha_1>0$ et $r_1>0$ tels que $C = [t_0-\alpha_1, t_0+\alpha_1] \times \bar{B}(y_0,r_1) \subset \Omega$ soit un cylindre de sécurité.

[B] p 107 - 109

Thm 38 (lemme des bouts) Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$ $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ continue, localement lipschitzienne par rapport à la variable d'espace. Soit $y :]c,d[\to \mathbb{R}^n$ une solution maximale de $y' = f(t,y(t))$, alors $(t,y(t))$ sort de tout compact de Ω quand $t \to d$

[G] Gourdon (Analyse)

[FGN] Oraux X-ENS analyse 3

[H] Hirsch Lacombe (Élément d'analyse fonctionnelle)

[B] Berthelin

[CG2] Caldero.