I. Cadre Général

A. Définition

On considère ici $Y \subset X$ avec X un espace métrique

Def 1 : Y est dense dans X si tout ouvert non vide de X contient au moins un élément de Y

prop 2 : Y est dense dans X si et seulement si $\overline{Y} = X$

coro 3 : Y est dense dans X SSI : pour tout $x \in X$, il existe une suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de Y qui converge vers x.

B. Premiers exemples

Ex 4 : $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ sont denses dans $\mathbb{R}$

Application 5 : le seul automorphisme de $\mathbb{R}$ est l'identité

GOU p235 **Application 6 :** (Théorème de Helly) soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions telle que : $\forall n \in \mathbb{N}$ $f_n : I \to \mathbb{R}$ où I est un intervalle de $\mathbb{R}$, f_n est croissante et $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée alors on peut extraire une sous-suite de $(f_n)_n$ qui converge simplement vers f

GOU p197 **Ex 7 :** Soit G un sous-groupe additif de $(\mathbb{R},+)$; alors soit G est de la forme $\alpha\mathbb{Z}$, $\alpha \in \mathbb{R}_+$, soit G est dense dans $\mathbb{R}$

DVPT ① **coro 8 :** si $a,b \in \mathbb{R}^*$, $a\mathbb{Z}+b\mathbb{Z}$ est dense dans $\mathbb{R}$ SSI $\frac{a}{b} \notin \mathbb{Q}$

coro 9 : si $a,b \in \mathbb{R}_+^*$, $a\mathbb{N}-b\mathbb{N}$ est dense dans $\mathbb{R}$ SSI $\frac{a}{b} \notin \mathbb{Q}$

application 10 : l'ensemble des valeurs d'adhérence de $(\sin(n))_{n\in\mathbb{N}}$ est $[-1,1]$

prop 11 : le complémentaire d'un sous ensemble de mesure de Lebesgue nulle de $\mathbb{R}^d$ est dense.

Ex 12 : La réciproque est fausse avec l'exemple de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$

II. Parties denses dans les espaces de Matrices

ici, on suppose que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Théorème 13 : $GL_n(\mathbb{K})$ est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

application 14 : $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $D_M \det(H) = \mathrm{Tr}({}^t\mathrm{com}(M)H)$ ROU p83

prop 15 : $D_n(\mathbb{C}) = \{$ matrices diagonalisables sur $\mathbb{C}\}$ est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$

applications 16 : (i) (Théorème de Cayley-Hamilton) : BMP p217
$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ $\chi_A(A) = 0$ où χ_A est le polynôme caractéristique de A

(ii) $\Phi : M = D+N \mapsto D$ n'est pas continue (où (D,N) est la décomposition de Dunford de $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$)

III. Approximation polynomiale

A. approximation de fonctions continues par des Polynômes

Théorème 17 : (approximation de Weierstrass) : les polynômes sont denses dans $\mathcal{C}^0([a,b])$. Plus précisément : Z-Q p508
$\forall f \in \mathcal{C}^0([a,b])$, $\exists$ $(P_n(f))_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de polynôme tel que $\|P_n(f) - f\|_\infty \leq \frac{3}{2}\omega_f\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ où ω_f est le module de continuité de f.

application 18 : soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue telle que $\forall n \in \mathbb{N}$ $\int_0^1 f(t)t^n\,dt = 0$ alors $f = 0$ sur $[0,1]$

application 19 : L'ensemble des fonctions continues sur $[0,1]$ nulle part dérivable est dense dans $\mathcal{C}^0([0,1])$ Z-Q p263

Ex 20 : Δ 1-périodique et $\Delta(x) = |x|$ $\forall x \in [-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$ $f(x) = \sum_{p\geq 0} \frac{1}{2^p}\Delta(2^p x)$ est continue et nulle part dérivable

B. approximation de fonctions par des polynômes trigonométriques

ici : • $\mathbb{L}^p_{2\pi}$ désigne l'ensemble $\left\{ f \text{ } 2\pi\text{-périodique mesurable}, \ \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(t)|^p dt < +\infty \right\}$

• $\mathcal{C}^0_{2\pi}$ désigne l'ensemble des fonctions continues sur $\mathbb{R}$ qui sont 2π-périodiques.

Def 21 : si $f \in \mathbb{L}^1_{2\pi}$, on définit son k-ème coefficient de Fourier ($k \in \mathbb{Z}$) par : $c_k(f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)e^{-ikt}dt$

on note :

• $S_n(f)(t) = \sum_{|k|\leq n} c_k(f)e^{ikt}$ (somme partielle de Fourier)

• $\sigma_N(f) = \frac{1}{N+1}\sum_{n=0}^{N} S_n(f)$ (somme partielle de Féjer)

BMP p121 Théorème 22 : $\mathcal{C}^\infty_{2\pi}$ est dense dans $\mathbb{L}^p_{2\pi}$ $\forall p \in [1,+\infty[$

Corollaire 23 : (lemme de Rieman-Lebesgue) si $f \in \mathbb{L}^1_{2\pi}$ alors $c_k(f) \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0$

Gou p287 Théorème 24 : (Féjer) : • si $f \in \mathcal{C}^0_{2\pi}$ alors $\sigma_N f \xrightarrow[N\to+\infty]{} f$ uniformément.

• si $f \in \mathbb{L}^p_{2\pi}$ $1 \leq p < +\infty$ $\sigma_N f \xrightarrow[N\to+\infty]{} f$ dans $\mathbb{L}^p_{2\pi}$

Coro 25 : les polynomes trigonométriques sont dense dans $\mathcal{C}^0_{2\pi}$ et dans $\mathbb{L}^p_{2\pi}$

Coro 26 : (injectivité de Fourier) $f \in \mathbb{L}^1_{2\pi} \to (c_n(f))_{n\in\mathbb{Z}}$ est injective

Coro 27 : la famille $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ où $e_n : t \mapsto e^{int}$ est une base hilbertienne de $\mathbb{L}^2_{2\pi}$

IV. Densité et espaces de Hilbert

A. Théorèmes généraux

Théorème 28 : (projection) si F est un sous-espace vectoriel fermé d'un espace de Hilbert H, alors $\forall x \in H$, il existe un unique élément $p_F(x) \in F$ réalisant la distance de x à F. De plus $x - p_F(x) \in F^\perp$ et $H = F \oplus F^\perp$

Coro 29 : si F est un s.e.v de H alors :
F est dense dans H SSI $F^\perp = \{0\}$

Def 30 : Un espace est dit séparable s'il contient une partie dénombrable dense

prop 31 : Un espace de Hilbert est séparable SSI il admet une base hilbertienne dénombrable

B. Polynômes orthogonaux

Def 32 : soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $w : I \to \mathbb{R}$ une fonction mesurable et strictement positive. On dit que w est une fonction poids si pour tout $n \in \mathbb{N}$: BMP p110

$$\int_I |x|^n w(x) < +\infty$$

on note $\mathbb{L}^p(I,w) = \left\{ f \text{ mesurable}, \int_I |f(x)|^p w(x)dx < +\infty \right\}$.

prop 33 : $\mathbb{L}^2(I,w)$ est un espace de Hilbert pour le produit scalaire : $\langle f,g \rangle = \int_I f(x)\overline{g(x)}w(x)\,dx$

BNP p112 et 110

Théorème 34 (DVP②) On considère w une fonction poids. S'il existe $\alpha > 0$ tel que $\int_I e^{\alpha|x|} w(x)\,dx < +\infty$ alors l'ensemble des fonctions polynomiales est dense dans $L^2(I,w)$

BNP p110

prop 35: Il existe une unique famille de polynômes $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}$: $\deg(P_n) = n$ et P_n unitaires, 2 à 2 orthogonaux, elle est obtenue par le procédé de Gram-Schmidt appliqué à la famille $(X^n)_{n\in\mathbb{N}}$. la famille $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est appelé famille des polynômes orthogonaux.

Ainsi, la famille des fonctions polynomiales $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ renormalisée forme une base hilbertienne de $L^2(I,w)$

Ex 36: (Polynômes de Legendre): si $I = [-1, 1]$ et $w(x) = 1 \ \forall x \in I$, les polynômes orthogonaux associés à w sont les polynômes de Legendre, les premiers termes sont: $P_0 = 1$; $P_1 = X$; $P_2 = X^2 - \frac{1}{3}$; $P_3 = X^3 - \frac{3}{5}X$

Ex 37: (Polynômes de Hermite): si $I = \mathbb{R}$ et $w(x) = e^{-x^2}$ on obtient les polynômes de Hermite dont les premiers termes sont:

$P_0 = 1$; $P_1 = X$; $P_2 = X^2 - \frac{1}{2}$; $P_3 = X^3 - \frac{3}{2}X$.

Développements :

Développement ①: Les sous-groupes additifs de $\mathbb{R}$ et application (Ex 7, coro 8, coro 9, application 10)

Développement ②: les Polynômes orthogonaux (Thm 34)

Références:

BNP : Objectif Agrégation (Beck, Malick, Peyré)

GOU : Les maths en tête Analyse (Gourdon)

ROU : Petit Guide du Calcul Différentiel (Rouvière)

Z-Q : Analyse pour l'agrégation (Zuily, Queffélec)